الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

رياضيات

السنة الثانية من التعليم الثانوي

الشعب: - **علوم تجريبية**
- **رياضيات**
- **تقني رياضي**

كتاب الأستـــاذ

تحت إشراف : محمد فاتح مراد مفتش التربية والتكوين

المؤلفون :

محمد قورين مفتش التربية والتكوين
جمال تاوريرت مفتش التربية والتكوين
كريمة بوعلي أستاذة التعليم الثانوي
بن عيسى بن عيسى أستاذ التعليم الثانوي
وهراني وهراني أستاذ التعليم الثانوي

بسم الله الرحمن الرحيم

ـ مدخل ـ

نضع بين يدي أستاذنا الكريم هذا الكتاب ونرجو أن يكون نبراسا له ومعينا في طريقة استعمال كتاب التلميذ (الكتاب المدرسي) .

لقد وزعنا الكتاب المدرسي إلى 14 فصلا حيث يشمل كل فصل :

1 – **أنشطة** : تهدف إلى التوطئة لمفاهيم باستعمال مكتسبات قبلية وتسمح للتلميذ من بناء معارفه بنفسه وتشخيص نقائصه .

2 – **الدرس** : تعرض فيه المفاهيم المقررة مفصلة ومدعمة ببراهين وأمثلة .

3 – طرائق : وهي تمارين محلولة تتماشى والدرس المقدم مدعمة بطرائق وتعاليق مناسبة وهي بمثابة تقويم تكويني للمتعلم من جهة واكسابه أدوات يستعملها في وضعيات مختلفة من جهة أخرى .

4 – **أعمال موجهة** :

ملاحظة : لا ينبغي اعتقاد أن هذا الجزء من الفصل يقتضى تفويج القسم كما أعتيد في السابق بل يقدم مع تلاميذ القسم الذين يمكن تفويجهم إلى مجموعات صغيرة أثناء انجاز الحصة .

يقترح هذا الجزء مواضيع للدراسة أثناء الحصة توظف فيها مفاهيم الدرس والطرائق المكتسبة قصد التوصل إلى نتائج لاستثمارها في حل مشكلات .

على الأستاذ أن يكيف الموضوع المقترح والأسئلة المطروحة (اختصارا أو تفصيلا) بما تقتضيه طبيعة الشعبة .

5 – **مسائل محلولة** : وهي مسائل إدماجية يوظف فيها الدرس توظيفا شاملا وقد قدمت الحلول مختصرة

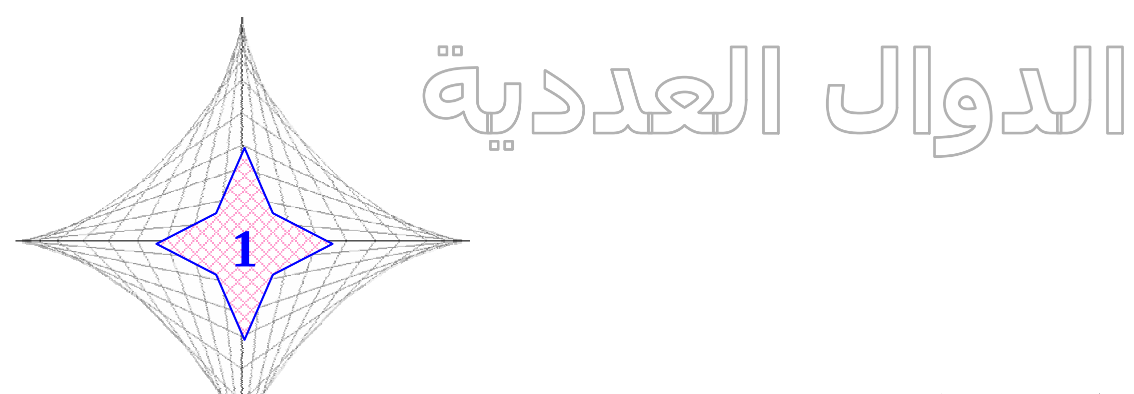
وعلى الأستاذ أن يشرك التلاميذ في تفصيل الحلول وتبرير الخطوات كما يمكنه اقتراح طرق حل أخرى يراها مناسبة .

6 – **أعمال تطبيقية** : يظهر هذا الجزء أهمية تكنولوجيات الإعلام والاتصال من خلال توظيف وتجنيد المعرفة المكتسبة بنجاعة وفعالية والمصادقة على النماذج المختلفة والمطابقة بين التجربة والنظرية .

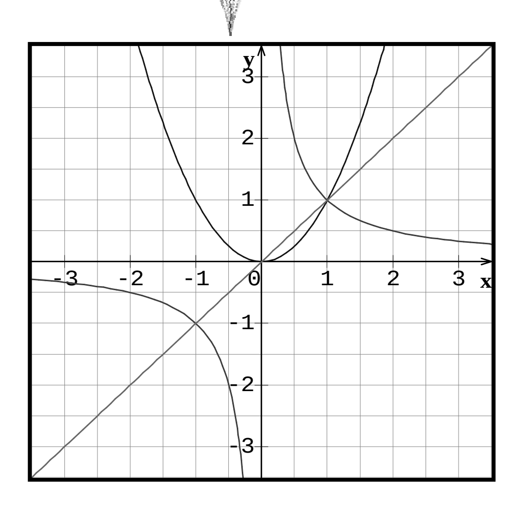
تنجز هذه الأعمال داخل القسم أو بالمخبر. نشير إلى أن موقع هذا الجزء في الفصل لا يعني أن إنجازه يتم في نهاية الفصل بل في المرحلة التي تقتضيها الحاجة.

7 – **تمارين** : هي وسيلة للتقويم التحصيلي ، قد يكون من بينها ما لم يرد في الدرس إلا أن حلها يتم بالأدوات المكتسبة من خلال الفصل .

أملنا أن تصميم الكتاب المدرسي ومضامينه تكون عونا للأستاذ في تحضير دروسه وانجازها من جهة وللتلميذ في بناء معارفه وتوظيفها وتقييم مكتسباته من جهة أخرى .



الكفاءات المستهدفة



- تفكيك دالة باستعمال الدوال المرجعية
- دراسة اتجاه تغير دالة باستعمال الدوال المرجعية
- تمثيل بعض الدوال بيانيا باستعمال الدوال المرجعية

❖ يتم من خلال هذا الفصل تعريف دوال جديدة واستنتاج تغيراتها انطلاقا من الدوال المرجعية التي تمت دراستها في السنة الأولى..

❖ تمكن مضامين هذا الفصل المتعلم من تنمية قدراته في المجالات التالية :

الحساب الجبري (العمليات على الدوال) ؛ المتباينات (اتجاه تغير بعض الدوال) ؛ التمثيل البياني (استعمال راسمات المنحنيات) ؛ البرهان (المثال المضاد) ... استغلال اتجاه التغيرات لحل مشكلات .

❖ لا يتم التطرق إلى استنتاج تغيرات الدالتين $f+g$ و $f.g$ تلقائيا انطلاقا من اتجاهي تغير الدالتين f و g إنما تعالج أمثلة مختلفة.

❖ دراسة الدوال المرفقة تمكن المتعلم من التعرف على بعض المنحنيات الشهيرة مثل القطع المكافئ والقطع الزائد مما يسهل دراسة الدوال من الدرجة الثانية والتعرف على خواصها.

❖ تأخذ الدوال عبارات جبرية مختلفة وعلى المتعلم اختيار العبارة المناسبة والملائمة لنوع المشكلة المطروحة .

الأنشطة

النشاط 1 :

الهدف : استعمال التمثيل البياني لدالة لحل معادلات ومتراجحات وتعيين قيم شهيرة .

1) $f(-2)=1$ ؛ $f(0)=3$ ؛ $f(3)=0$.

2) $S_1=\{-4;2\}$ ؛ $S_2=\{-3;1;3\}$ ؛ $S_3=\{0\}$.

3) $S_1=\{-1;1;2\}$ ؛ $S_2=\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

4) $S_1=[-4;-3[\cup]1;3[$ ؛ $S_2=[-1;1]\cup[2;3]$.

5)

x	-4		0		2		3
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↗	0

6) القيمة الحدية الصغري هي (-1) وذلك من أجل $x=-4$ و $x=2$ بينما القيمة الحدية الكبرى هي 3 من أجل $x=0$.

النشاط 2 :

الهدف : استعمال دالة مرجعية لدراسة تغير طول قطعة مستقيمة متغيرة .

1) $\cos\alpha=\dfrac{x}{f(x)}$ و $\cos\alpha=f(x)$.

2) $f(x)=\sqrt{x}$.

3) $x\in]0;1]$.

النشاط 3 :

الهدف : استعمال تقاطع منحني دالتين مرجعيتين لحل معادلة من الدرجة الثانية.

1) الرسم :

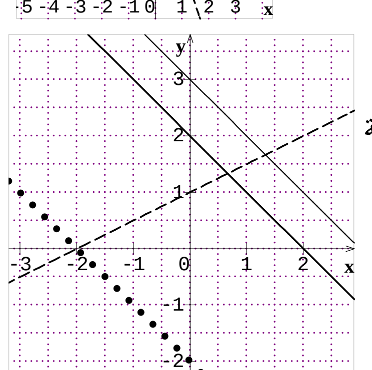
2) $S=\{-4;1\}$.

3) $h(-4)=0$ ؛ $h(1)=0$.

النشاط 4 :

الهدف : إدراج مفهومي العمليات الجبرية على الدوال والدوال المرجعية

1) الرسم



2) نقطة التقاطع هي $A\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$

3) $D_h=\mathbb{R}-\{2\}$.

النشاط 5 :

الهدف : مفهوم مركب دالتين.

تصحيح : $f(t)=25t$ عوضا $f(t)=20t$ ؛ $y=KL$ عوضا $y=ML$.

$h(t)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+2500t^2}$ عوضا $f(t)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+2500t^2}$

1) $KL=\sqrt{0,25+x^2}$.

الأعمال الموجهة

تغيير المعلم :

الهدف : تغيير المعلم لإثبات أن منحني دالة يقبل :
- مركز تناظر – محور تناظر .

1) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$

2) $\begin{cases}x=X-2\\ y=Y-1\end{cases}$ ؛ $y=f(x)=x^2+4x+3$

بعد الحساب نجد : $Y-1=(X-2)^2+4(X-2)+3$

$Y=X^2$. $x\mapsto x^2$.دالة زوجية .

معادلة محور التناظر هي $x=-2$.

3) $\begin{cases}x=X-1\\ y=Y+1\end{cases}$ بعد التعويض والحساب نجد $Y=\dfrac{1}{X}$.

$x\mapsto\dfrac{1}{x}$ دالة فردية .إحداثيتي مركز التناظر هي $(-1;1)$.

4) المراحل :

بالنسبة لمحور التناظر : - تغيير المعلم من $(O;\vec{i};\vec{j})$ إلى $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث فاصلة Ω هي a .- كتابة معادلة (C_f) في $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ - إثبات الدالة المحصل عليها زوجية .

بالنسبة لمركز التناظر : - تغيير المعلم من $(O;\vec{i};\vec{j})$ إلى $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$.- كتابة معادلة (C_f) في $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ - إثبات الدالة المحصل عليها فردية .

التمثيل البياني للدالة : $x\mapsto f(x+b)+k$

الهدف : التمثيل البياني لصورة منحني دالة بواسطة انسحاب

1) $M(x;x^2)$ ، $M'(x+1;x^2+1)$ ومنه $\overrightarrow{MM'}(1;1)$

2) أ) $g(x-b)=f(x)+k$ وبالتالي $\overrightarrow{MM'}(-b;k)$

M' صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $-b\vec{i}+k\vec{j}$

ب) (C_g) صورة (C_f) بالانسحاب السابق

3) (C_g) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-b\vec{i}$.

4) (C_g) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-\vec{i}$.

(C_h) صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{j}$ ،

أو (C_h) صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-\vec{i}+2\vec{j}$

تـمــاريــن

1 1) خاطئ . 2) صحيح . 3) صحيح .
4) صحيح (المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين في $[0;4]$)
5) خاطئ .

2 1) خاطئ . 2) صحيح . 3) صحيح . 4) صحيح

3 1) صحيح لأن u معرفة على $[0;+\infty[$.
2) صحيح لأن للدالتين f و g نفس اتجاه التغير .
3)خاطئ لأن مثلا $u(10)\notin[0;9]$.
4) خاطئ . 5) خاطئ . 6) صحيح .

4 3) $(f.g)(x)=x(x^2-2x)$

5 1) $(g\circ h)(x)=2x^2+5$.

6 1) $f\geq g$ لأن (C_f) يقع فوق (C_g) على $[-1;2]$.

7 2) f متزايدة على $]-1;+\infty[$.

8 1) $f(1)=-\dfrac{3}{2}$ ؛ $f(0)=3$ ؛ $f(-2)=15$ ؛ $f(\sqrt{3})=\dfrac{9}{2}-5\sqrt{3}$.
2) سابقتا العدد 3 هما 0 و 10 .
نقوم حل المعادلة $f(x)=\dfrac{17}{2}$ ذات الحلين -1 و 11 .

9 1) بقراءة بيانيا نجد $f(-1)=3$ ؛ $f(0)=1$ ؛ $f(1)=-1$.
2) سوابق العدد (-1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-1$ ونقرأ -2 و1 .
3) حلول المعادلة $f(x)=3$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ') ذي المعادلة $y=3$ والتي تنتمي إلى المجال $[-2;2]$.

10 $D_f=\mathbb{R}$.

11 $D_f=\mathbb{R}$.

12 $D_f=\mathbb{R}$.

13 $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

14 $D_f=\mathbb{R}-\{4\}$.

15 $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$.

16 $D_f=\mathbb{R}$.

17 $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$.

18 $|x|=3$ يعني $x=-3$ أو $x=3$
ومنه : $D_f=]-\infty;-3[\cup]-3;3[\cup]3;+\infty[$.

19 $D_f=[1;+\infty[$.

20 $D_f=[2;3[\cup]3;+\infty[$.

21 $D_f=\mathbb{R}$.

22 $D_f=\mathbb{R}$ ، $D_g=[-2;+\infty[$ ومنه : $f\neq g$.

23 $f=g$.

24 $D_f=\mathbb{R}^*$ ، $D_g=\mathbb{R}$ ومنه : $f\neq g$.

25 لدينا $D_f=D_g=[0;1[\cup]1;+\infty[$ ومن أجل كل x من D_f ؛ $f(x)=g(x)$ ومنه $f=g$.

26 $f=g$.

27 $f=g$.

28 1) الدوال f ، g ، $f+g$ و $f.g$ معرفة على $\mathbb{R}$.
2) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x^2+2x-2$.
$(f.g)(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$

29 1) $D_f=D_g=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.
2) $D_{3f}=D_f$ ؛ $D_{-2g}=D_g$.

30 1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
$(f+g)(x)=2(x^2+2x+1)=2(x+1)^2$.
2) لدينا $(2f+g)(x)=(2x+1)^2$.
إذن $(2f+g)=h^2$ حيث $h:x\mapsto 2x+1$.

31 تصحيح الشرط " في حالة وجودها " يحذف من السؤال1 ويضاف إلى السؤال 2 .
1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.
$(f+g)(1)=\dfrac{3}{2}$ ، $(f+g)(2)=\dfrac{29}{4}$ ،
$(f+g)(\sqrt{5})=\dfrac{47\sqrt{5}}{10}-2$.
$(3f)(x)=3\times f(x)$. ومنه :
$(3f)(1)=9$ ، $(3f)(2)=24$ ،
$(3f)(\sqrt{5})=15\sqrt{5}-6$.
$(-2g)(x)=-2\times g(x)=\dfrac{3}{x}$ ومنه :
$(-2g)(1)=3$ ، $(-2g)(2)=\dfrac{3}{2}$ ،
$(-2g)(\sqrt{5})=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$
2) الدوال $f.g$ ، $\dfrac{f}{g}$ ، $\dfrac{1}{2}f-g$ ، معرفة على $]0;+\infty[$ ومنه العددين $-\dfrac{1}{2}$ ، -1 لا تقبل صور .

، $\left(\dfrac{f}{g}\right)(3)=-26$ ، $(f.g)(3)=-\dfrac{13}{2}$

. $\left(\dfrac{1}{2}f-g\right)(3)=7$

32 الدالتان $f\circ g$ و $g\circ f$ معرفتان على $\mathbb{R}$ ولدينا :

. $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=-6x$

. $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=-6x$

33 الدالتان $f\circ g$ و $g\circ f$ معرفتان على $\mathbb{R}$ ولدينا :

. $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=3x-1$

. $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=3x-7$

34 الدالتان $f\circ g$ و $g\circ f$ معرفتان على $\mathbb{R}$ ولدينا :

. $(f\circ g)(x)=9x^2-12x+4$

.$(g\circ f)(x)=2-3x^2$

35 الدالة $f\circ g$ معرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ ولدينا :

. $(f\circ g)(x)=\dfrac{-1}{2x+1}$

الدالة $g\circ f$ معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ ولدينا :

. $(g\circ f)(x)=\dfrac{-2}{x+1}$

36 الدالة f معرفة على $]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$ ومنه

الدالة $f\circ g$ معرفة إذا كان $x\neq 0$ و $\left(\dfrac{1}{x}-3\leq -2\right.$

أو $\left.\dfrac{1}{x}-3\geq 0\right)$ أي $x\in]-\infty;0[\cup\left]0;\dfrac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty[$

ولدينا : $(f\circ g)(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x}+3}$

الدالة g معرفة على $\mathbb{R}^*$ ومنه الدالة $g\circ f$ معرفة إذا كانت f معرفة و $f(x)\neq 0$ أي $x\in]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$

ولدينا : $(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}-3$.

37 1) الدالة k معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $(h\circ g)(x)=x^2+1=k(x)$

2) الدالتان $(f+k)$ و $(g\circ h)$ معرفتان على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $(f+k)(x)=x^2+2x+1$

$(g\circ h)(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1$

و منه : $f+k=g\circ h$

بنفس الطريقة نثبت صحة 3) ، 4) ، 5) و 6) .

38 $f=u\circ v$ حيث $u(x)=x^2$ و $v(x)=x-1$

39 $f=u\circ v$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $v(x)=x+2$

40 $f=u\circ v$ حيث $u(x)=\dfrac{3}{x}$ و $v(x)=x+1$.

41 $f=u\circ v$ حيث $u(x)=\sqrt{x}$ و $v(x)=x+1$.

42 $f=u\circ v$ حيث $u(x)=\cos x$ و $v(x)=x-1$.

43 $f=u\circ v$ حيث $u(x)=|x|$ و $v(x)=\dfrac{2}{5}x-1$.

44 لدينا من أجل كل x من I : $(f+g)(x)=x^2+x$

ليكن x_1 و x_2 عددان من I حيث $x_1<x_2$

إذن $x_1{}^2<x_2{}^2$ و بالتالي $x_1{}^2+x_1<x_2{}^2+x_2$

أي $(f+g)(x_1)<(f+g)(x_2)$

إذن $(f+g)$ متزايدة تماما على I .

45 ليكن x_1 و x_2 عددان من $]-\infty;0]$ حيث $x_1<x_2$

إذن $x_1{}^2>x_2{}^2$ و $|x_1|>|x_2|$

و بالتالي $x_1{}^2+|x_1|>x_2{}^2+|x_2|$

إذن f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

46 الدالة $x\mapsto x$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

و الدالة $x\mapsto -\dfrac{1}{x}$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

و بالتالي الدالة $x\mapsto x-\dfrac{1}{x}$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

47 1) $f=u\circ v$ حيث من أجل كل x من $]-\infty;3]$: $v(x)=3-x$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}^+$: $u(x)=\sqrt{x}$.

2) بما أن ليس للدالتين u و v نفس اتجاه التغير فإن الدالة $u\circ v$ متناقصة تماما على $]-\infty;3]$.

و منه هي كذلك متناقصة تماما على $]-\infty;3]$.

48 f و g معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=(x-2)^2$ و $g(x)=(x-2)^2-1$

49 1) $D_h=\mathbb{R}^*$

2) المنحني الأول ممثل للدالة g ؛ المنحني الثاني ممثل للدالة f ؛ يبقى المنحني الثالث ممثل للدالة h .

3) الدالتان f و g لهما تفس اتجاه التغير على $]-\infty;0[$ ، إذن الدالة h متزايدة تماما على $]-\infty;0[$.

• ليس للدالتين f و g تفس اتجاه التغير على $]0;+\infty[$ ، إذن h متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

50 – منحني الدالة g نظير (C) بالنسبة لمحور الفواصل

- منحني الدالة h ينطبق على (C) في $]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$ و يكون نظير (C) بالنسبة لمحور الفواصل في $[0;2]$.

• - منحني الدالة k هو صورة

(C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{i}+3\vec{j}$.

51 1) $\alpha=1$ و $\beta=2$

2)

x	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$
x^3	$\nearrow$

3) لدينا $f(x)=(x-1)^3+2$

الدالتان $x\mapsto x-1$ و $x\mapsto x^3$ متزايدتان تماما على $\mathbb{R}$

و منه الدالة $u:x\mapsto(x-1)^3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

(مركب دالتين). إذن الدالة $(u+2)$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

4) (C) هو صورة منحني الدالة $x\mapsto x^3$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{i}+2\vec{j}$.

52 الدالة f_1 معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f_1(x)=f(x)$ و الدالة f_1 دالة زوجية

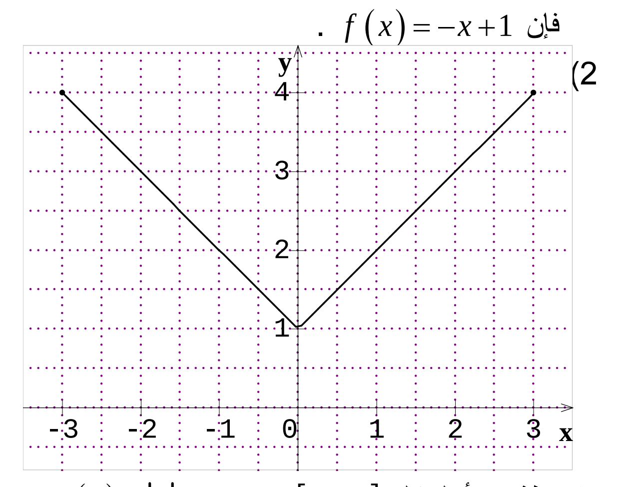
إذن جزء (C_{f_1}) في المجال $[0;+\infty[$ ينطبق على (C) في هذا المجال و جزء (C_{f_1}) في المجال $]-\infty;0]$ هو نظير الجزء السابق من (C_{f_1}) بالنسبة إلى محور التراتيب

لدالة f_2 معرفة على $\mathbb{R}$

إذا كان (C) من فوق محور الفواصل فإن (C_{f_2}) ينطبق على (C) و إذا كان (C) من تحت محور الفواصل فإن (C_{f_2}) نظير (C) بالنسبة إلى محور الفواصل.

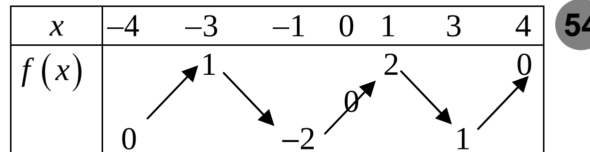
53 1) ليكن $x\in[-3;0]$ ومنه $-x\in[0;3]$ إذن $f(-x)=-x+1$ ، علما أن $f(-x)=f(x)$ فإن $f(x)=-x+1$.

2)



ملاحظة من أجل كل $x\in[-3;3]$ ؛ $f(x)=|x|+1$.

54



x	-4	-3	-1	0	1	3	4
$f(x)$	0 $\nearrow$	1 $\searrow$	-2 $\nearrow$	0 $\nearrow$	2 $\searrow$	1 $\nearrow$	0

55 1) $a=-1$ ، $b=-5$ و $c=10$.

2) $f(x)-(-x-5)=\dfrac{10}{2-x}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\dfrac{10}{2-x}$	$+$	‖	$-$
الوضعية	(C_f) فوق المستقيم	‖	(C_f) تحت المستقيم

56 تصحيح : f معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$

1) قواعد تغيير المعلم : $\begin{cases}x=X-2\\ y=Y-1\end{cases}$

معادلة (C_f) في المعلم $(A;\vec{i};\vec{j})$ هي : $Y=\dfrac{X^2-1}{X}$

2) الرسم

3) A مركز تناظر للمنحني (C_f).

57 لنبين أن $[(\Delta):x=1]$ محور تناظر لـ(C) .

لتكن مثلا النقطة $A(1;0)$. معادلة (C) في المعلم $(A;\vec{i};\vec{j})$ هي $Y=\dfrac{X^2+2}{X^2}$.

الدالة $g:x\mapsto\dfrac{x^2+2}{x^2}$ زوجية ومنه $[(\Delta):x=1]$ محور تناظر .

58 $f(x)=-x+\dfrac{3}{x-2}$. من أجل كل x_1 و x_2 من $]-\infty;0[$ حيث $x_1<x_2$ لدينا : $\begin{cases}-x_1>-x_2\\ \dfrac{3}{x_1-2}>\dfrac{3}{x_2-2}\end{cases}$ ومنه :

$-x_1+\dfrac{3}{x_1-2}>-x_2+\dfrac{3}{x_2-2}$ أي $f(x_1)>f(x_2)$

وبالتالي f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$.

59 f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

60 f متزايدة تماما على $]0;2[$.

61 f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

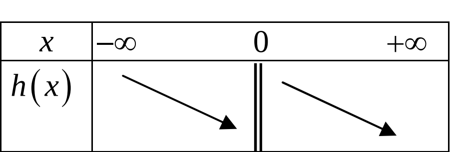
62 f متناقصة تماما على $]-\infty;-3[$.

63 1) الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ والدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

2) الدالة h معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $h(x)=-x$.

الدالة h متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

64



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↘	2	↗

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	↘	||	↘

2) من أجل كل عددين x_1 و x_2 من $]-\infty;0[$ حيث $x_1<x_2$

لدينا $\begin{cases} g(x_1)>g(x_2) \\ h(x_1)>h(x_2) \end{cases}$ ومنه :

$g(x_1)+h(x_1)>g(x_2)+h(x_2)$ أي :

$f(x_1)>f(x_2)$ وبالتالي f متناقصة تاما على $]-\infty;0[$

3) من أجل كل عددين x_1 و x_2 من $]0;\infty[$ حيث $x_1<x_2$

لدينا $\begin{cases} g(x_1)<g(x_2) \\ h(x_1)>h(x_2) \end{cases}$، لا يمكن المقارنة بين

$g(x_1)+h(x_1)$ و $g(x_2)+h(x_2)$

65 1) ليكن x_1 و x_2 عددين من $]0;+\infty[$ حيث $x_1<x_2$

لدينا : $\begin{cases} 0<x_1^2+1<x_2^2+1 \\ 0<\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \end{cases}$ ومنه

$(x_1^2+1)\sqrt{x_1}<(x_2^2+1)\sqrt{x_2}$ أي $f(x_1)<f(x_2)$.

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2) ليكن x_1 و x_2 عددين من $]-\infty;0[$ حيث $x_1<x_2$

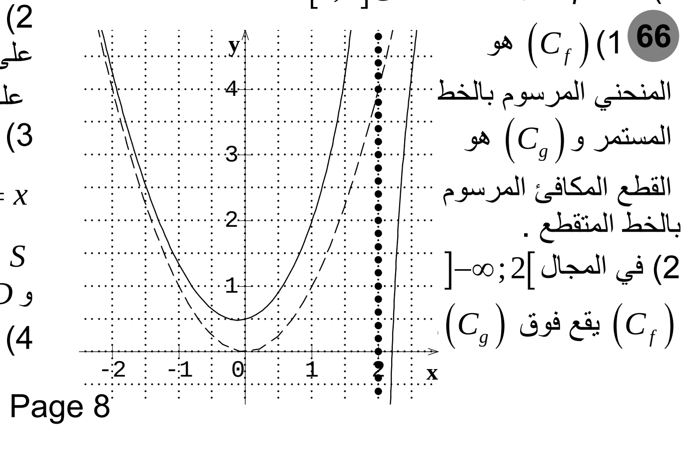
لدينا $\begin{cases} -3x_1+2>-3x_2+2>0 \\ x_1^2>x_2^2>0 \end{cases}$ ومنه :

$(-3x_1+2)x_1^2>(-3x_2+2)x_2^2$ أي $f(x_1)>f(x_2)$

وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$.

3) الدالة f متزايدة تماما على $[1;8]$.

66 1) (C_f) هو المنحني المرسوم بالخط المستمر و (C_g) هو القطع المكافئ المرسوم بالخط المتقطع .



2) في المجال $]-\infty;2[$ (C_g) يقع فوق (C_f)

و في المجال $]2;+\infty[$ (C_f) يقع تحت (C_g) .

67 1) f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

إذا كان $x\geq 0$ فإن $2x\geq 0$ ومنه $x^2+2x\geq 0$.

2) g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

إذا كان $x\geq 0$ فإن $x+1\geq 1$ ومنه $\sqrt{x+1}\geq 1$

أي : $-1+\sqrt{x+1}\geq 0$.

3) $g\circ f$ معرفة على $[0;+\infty[$ و $(g\circ f)(x)=x$.

4) $f\circ g$ معرفة على $[0;+\infty[$ و $(f\circ g)(x)=x$.

68 نعين النقطة $M_1(x;f(x))$ ثم نعين النقطة $M(f(x);f(x))$ من المنصف ثم نعين النقطة $M_2(f(x);g[f(x)])$ أي $M_2(f(x);h(x))$

69 1) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ؛ $f(x)=u(x)+v(x)$

حيث $u(x)=3x$ و $v(x)=\frac{-1}{3x}$.

2) الدالتان u و v متزايدتان تماما على كلا المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ؛ إذا كان $x_1<x_2$ فإن :

$u(x_1)<u(x_2)$ و $v(x_1)<v(x_2)$ ومنه :

$u(x_1)+v(x_1)<u(x_2)+v(x_2)$ إذن f متزايدة تماما على كلا المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

3) ليكن $x\in\mathbb{R}^*-\left\{\frac{1}{3}\right\}$: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{9x^2-1}{3x-1}=3x+1$

4) $D_h=\mathbb{R}$ و $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}^*-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ إذن $h\neq\frac{f}{g}$.

70 1) من أجل كل x من I ؛ $f(x)=u(x)+v(x)$

حيث $u(x)=\frac{1}{2}x$ و $v(x)=\frac{-1}{2x}$.

2) u و v متزايدتان تماما على I . f متزايدتان تماما على I .

3) من أجل كل x من I ؛ $S(x)=x$ و $D(x)=\frac{1}{x}$

S متزايدة تماما على I و D متناقصة تماما على I

4) $M_s(x;S(x))$ و $M_D(x;D(x))$ النقطتان من

منحنيي الدالة S و الدالة D على الترتيب

و $M\left(x;\dfrac{S(x)+D(x)}{2}\right)$ نقطة من منحني الدالة g

وتكون M منتصف القطعة $[M_S M_D]$.

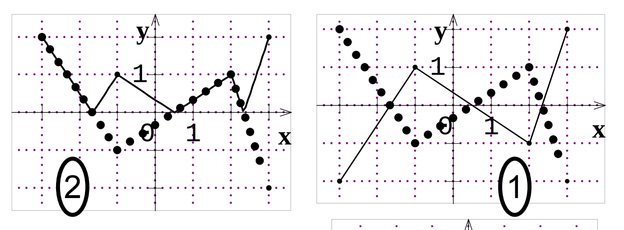
71 نعتبر دالة f معرفة على المجال $[-3;3]$.

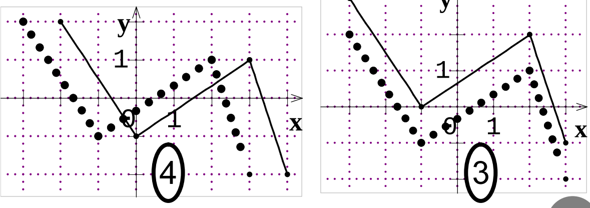
1) منحني f_1 نظير منحني f بالنسبة لمحور الفواصل.

2) أربعة أجزاء منطبقة مثنى مثنى وجزآن متناظران بالنسبة لمحور الفواصل .

3) منحني f_3 صورة منحني f بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$

4) منحني f_4 صورة منحني f بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{i}$





72 كل من $g\circ f$ و $f\circ g$ معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$(f\circ g)(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$ وكذلك

$(g\circ f)(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$.

73 1) نجد بسهولة $f(-x)$ $f(x)$

2)

x	$-\infty$ -2 0 2 $+\infty$
$x-2$	- - - +
$x+2$	- + + +

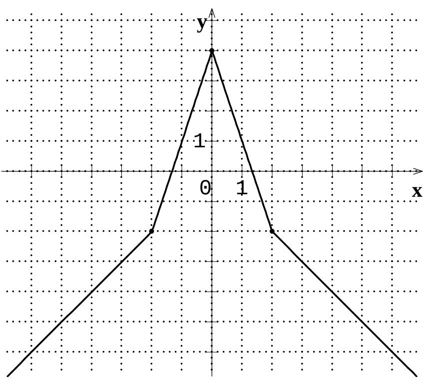
من أجل $x\in]-\infty;-2[$ ؛ $f(x)=x$

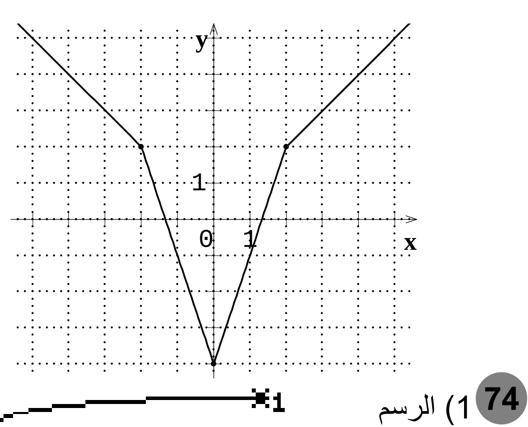
من أجل $x\in[-2;0]$ ؛ $f(x)=3x+4$

من أجل $x\in[0;2]$ ؛ $f(x)=-3x+4$

من أجل $x\in[2;+\infty[$ ؛ $f(x)=-x$

3) الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$.





74 1) الرسم

2) التخمين $A=3$.

3) $f(x)=3+\dfrac{-5}{x+1}$

4) باستعمال العمليات على الدوال نجد الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

5) من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ؛ $x+1>0$ ومنه

$\dfrac{-5}{x+1}<0$ إذن $f(x)-3<0$

6) $f(x)$ يتغير في المجال $]-\infty;3[$.

75 1) $\overrightarrow{AM}\left(x-2;\sqrt{x}\right)$ ؛ $AM=\sqrt{x^2-3x+4}$

2) أ) $f(x)=x^2-3x+4$ ومنه $AM=\sqrt{f(x)}$.

ب)

x	0 $\frac{3}{2}$ $+\infty$
$f(x)$	4 ↘ $\frac{7}{4}$ ↗

ج) القيمة الحدية الصغرى للدالة f هي $\dfrac{7}{4}$ ومنه أصغر مسافة ممكنة لـ AM هي $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ وفاصلة M هي الحل الموجب للمعادلة $f(x)=\dfrac{7}{4}$ ونجد $M\left(\dfrac{3}{2};\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$.

76 $\dfrac{MQ}{AH}=\dfrac{BQ}{BH}$ و منه $\dfrac{6-x}{6}=\dfrac{MQ}{9}$

أي $MQ=9\times\dfrac{6-x}{6}$ ، إذن $MQ=\dfrac{18-3x}{2}$

$$A(x)=MQ\times QP=\frac{18-3x}{2}\times 2x=-3x^2+18x$$

2) الدالة A معرفة على $[0;6]$

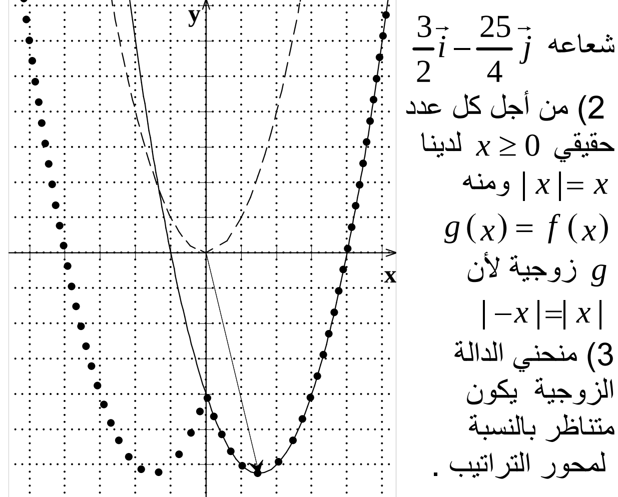
3) الدالة A متزايدة تماما على $[0;3]$ و متناقصة تماما على $[3;6]$.

4) الدالة A تقبل القيمة 27 كقيمة حدية عظمى عند $x=3$.

5) تكون مساحة المستطيل $MNPQ$ أكبر ما يمكن إذا كان $x=3$ و تكون قياسات المستطيل هي 6 و $\frac{9}{2}$.

77 1) بنشر العبارة $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$ نجد عبارة $f(x)$.

المنحني (C_f) صورة المنحني (P) بالانسحاب الذي شعاعه $\frac{3}{2}\vec{i}-\frac{25}{4}\vec{j}$



2) من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ لدينا $|x|=x$ ومنه $g(x)=f(x)$

g زوجية لأن $|-x|=|x|$

3) منحني الدالة الزوجية يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

78 1) (I) نحل في $\mathbb{R}-\{3\}$ المعادلة $f(x)-g(x)=0$ أي $\frac{(x+4)(x-1)(x-2)}{2(x-3)}=0$

ونجد إحداثيات نقط التقاطع $(-4;0)$ $\left(1;\frac{5}{2}\right)$ و $(2;6)$.

2) ندرس إشارة $f(x)-g(x)$

(II) 1) $f_m(x)=g(x)$ تكافئ

$mx^3-7mx^2+(16m+1)x-12m-2=0$

2) $8m-28m+32m+2-12m-2=0$

3) $a_m=m$ ، $b_m=-5m$ ، $c_m=6m+1$ ومنه (E)

تكافئ $(x-2)(mx^2-5mx+6m+1)=0$

مميز المعادلة $\Delta=m^2-4m$

$mx^2-5mx+6m+1=0$

- $m\in[0;4[$
- $m\in]-\infty;0[\cup]4;+\infty[$

79 تصحيح المعلم متعامد وليس متجانس

1) فاصلة I هي $\frac{t}{2}$ ولدينا : $\frac{AN}{BC}=\frac{AM}{MB}$ أي

$AN=\frac{t}{1-t}$ ومنه ترتيب N هو $\frac{t}{t-1}$ وبالتالي ترتيب I هو $\frac{t}{2(t-1)}$

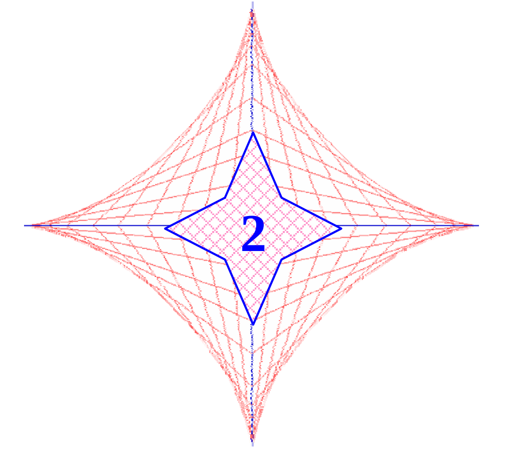
2) لدينا $t=2x$ و منه $y=\frac{2x}{2(2x-1)}=\frac{x}{2x-1}$

3) أ) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2x-1}$

ب) f متناقصة تماما على كل من $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

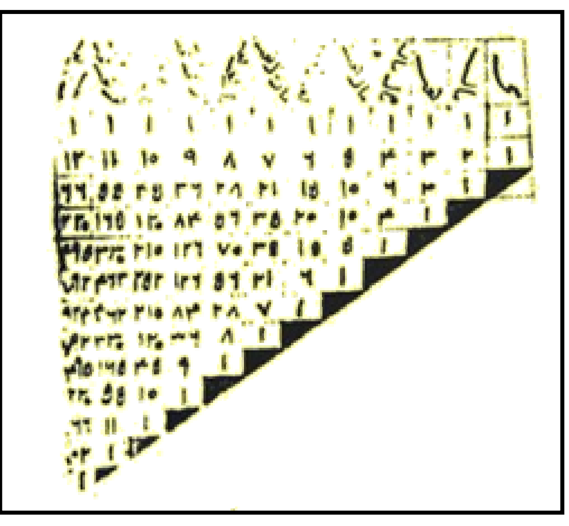
ج)

إحداثيي مركز التناظر هي $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.



الدوال كثيرات الحدود
مسائل الدرجة الثانية

الكفاءات المستهدفة



- التعرف على دالة كثير حدود و على درجتها.
- حل مسائل تستخدم فيها معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية.

- يتم في هذا الفصل الربط بين الجانب الجبري المتمثل في حل معادلات و متراجحات و الجانب البياني المتمثل في دراسة الدوال.
- لقد قدم تعريف جذر كثير حدود ليس بهدف حل المعادلات ذات درجة أكبر من ثلاثة و إنما لاستعماله في تحليل كثيرات الحدود.
- يبقى مفهوم إشارة ثلاثي الحدود من أهم مميزات هذا الفصل باعتباره جديد على التلاميذ و نظرا لتنوع استعمالاته في مختلف الفصول القادمة.
- يسمح من جهة أخرى هذا الفصل بإعادة استثمار نتائج الفصل الأول و المتمثلة في اتجاه تغير دالة، القيم الحدية، الدوال المرفقة ...

الأنشطة

النشاط 1 :

الهدف : تحليل عدد طبيعي

1)

$$\left(x^3+2x+1\right)\left(x^2+1\right)=x^5+3x^3+x^2+2x+1$$

2) $103121=1021\times101$. 103121 ليس أوليا.

النشاط 2 :

الهدف : حل معادلات باستعمال العبارة المناسبة لدالة.

1) $(x+1)(x+5)=x^2+6x+5$

$$(x+3)^2-4=x^2+6x+5$$

2) $S_1=\{-5,-1\}$، الحلان هما فصلتا نقطتي تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

$S_4=\{-4,-1\}$، الحلان هما فصلتا نقطتي تقاطع (C_f) مع المستقيم:ذي المعادلة: $y=x+1$

النشاط 3 :

الهدف : حل بيانيا متراجحة من الدرجة الثانية.

1)شعاع الانسحاب هو $\vec{u}\,(1,-3)$

2) $S=\left\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$. حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (P) مع محور الفواصل.

3) حلول المتراجحة هي فواصل نقط (P) التي تقع أسفل محور الفواصل و منه: $S=\left]1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right[$.

4) $S=\left]-\infty,1-\sqrt{3}\right]\cup\left[1+\sqrt{3},+\infty\right[$

يتم التحقق بواسطة جدول بعد التحليل.

النشاط 4 :

الهدف : التبرير الهندسي لحل معادلة من الدرجة الثانية.

2) $x=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+4}+\frac{3}{2}=4$

3) $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{b}{2}$

التطبيق: $x=\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+5}+\frac{4}{2}=5$

تكتب المعادلة على الشكل: $\frac{3}{2}x+10=x^2$

$$x=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+10}+\frac{3}{4}=4$$

النشاط 5 :

الهدف : حل بيانيا معادلة باستعمال منحني دالتين مرجعيتين.

1) نلاحظ أن 0 ليس حلا لـِ$(*)$. نقسم الطرفين على x.

2)

3) $S=\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$. يتم التحقق بالتعويض في $(*)$.

الأعمال الموجهة

مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

الهدف: التعرف على بعض تطبيقات مجموع و جداء الحلين.

التطبيق1:

مثال: $\alpha=5$ الحل الثاني هو 0.5

التطبيق2:

البرهان: بفرض $a+b=S$ و $ab=P$ يكون لدينا:

$b=S-a$ و $a(S-a)=P$ أي: $a^2-Sa+P=0$

و بالتالي فإن a حل للمعادلة $x^2-Sx+P=0$

كذلك b هو حل للمعادلة $x^2-Sx+P=0$.

عكسيا إذا كان a و b حلين للمعادلة $x^2-Sx+P=0$

فإن: $a+b=S$ و $ab=P$.

مثال: لدينا $a+b=18$ و $ab=77$. a و b هما حلا المعادلة: $x^2-18x+77=0$ أي 7 و 11.

التطبيق3:

البرهان: مباشر

مثال:

m	$-\infty$ -1	$-\frac{1}{3}$	0	1	$+\infty$
Δ	-	-	+	+	+
$\frac{c}{a}$	+	+	+	-	+
$-\frac{b}{a}$	-	+	+	+	-

باستعمال المبرهنة يتم الاستنتاج انطلاقا من الجدول.

المعدلات و المتراجحات مضاعفة التربيع:

الهدف: حل معادلات و متراجحات مضاعفة التربيع.

1) **التطبيق:** $S_1 = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ، $S_2 = \{-2,-1,1,2\}$

$S_3 = \varnothing$

2)**دراسة المثال:** $S =]-2,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},2[$

التطبيق: $S =]-\infty,-\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5},+\infty[$

تـــمـــاريـــن

1 صحيح .

2 خاطئ .

3 خاطئ .

4 خاطئ.

5 صحيح.

6 1) 0.
2) 3) 4) 5) ليست دوال كثيرات حدود.

7 1) صحيح. 2) خاطئ. 3) صحيح.

8 1) صحيح. 2) خاطئ. 3) صحيح.
4) خاطئ. 5) خاطئ.

9 صحيح.

10 2).

11 2).

12 3).

13 1).

14 2) .

15 1) لأنها ليست معرفة على $\mathfrak{R}$.
2) لأنها ليست معرفة على $\mathfrak{R}$.
3) لأنها ليست من الشكل
$x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + 1$
4) 4) لأنها ليست من الشكل
$x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + 1$

16 1).

17 1) $f : x \to x^2 + x + 1$.
2) $f : x \to -x^2 + x - 1$.
3) $f : x \to -x^2 + x + 1$.

18 2) سابقتا هما: 1 و $\frac{1}{3}$.

3) القيمة الحدية العظمى هي: $\frac{1}{3}$.

4) f متزايدة تماما على المجال $]-\infty , \frac{1}{3}]$.

f متناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{3} , +\infty[$.

19 $f : x \to 3x^2 - 6x - 24$.

20 1) $P(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$.
درجته 3.
2) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 11x + 5$
درجته 3.
3) $P(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$
درجته 3.
4) $P(x) = 12x - 14$.
درجته 1.

21 $P(x) + Q(x) = -x^2 + 5x - 6$
1) $P(x) - Q(x) = -5x^2 - 3x - 4$
$2P(x) + 3Q(x) = 14x - 13$
$P(x) + Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$
2) $P(x) - Q(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 9$.
$2P(x) + 3Q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x + 2$

22 1) درجة $P(x)$ هي 5 و معامل حده الأعلى 6-
2) درجة $Q(x)$ هي 7 و معامل حده الأعلى27-
3) درجة $R(x)$ هي4 و معامل حده الأعلى 5.

23 1) $f(-1)=0$ إذن 1- جدر لـ $f(x)$.
نفس الشئ مع 2) و 3).

24 1) $a=1$, $b=0$, $c=-4$
2) $P(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$
3) الجذور هي: 2- ، 2 ، 1.

25 1) $P(-2)=0$
2) $P(x) = 4(x+2)(x-\frac{3}{2})^2$
3) الجذور هي: 2- ، $\frac{3}{2}$

26 $a= \frac{21}{2}$, $b=5$.

27 $a=-1$, $b= 3$, $c=1$.

28
1) $f(x)=(x-3)^2-1$
حلول المعادلة هي: 4 ، 2.
2) $f(x)=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}$
حلول المعادلة هي: 3- ، 2
3) $f(x)=-\left[(x-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}\right]$
المعادلة لا تقبل حلول.
4) $f(x)=3\left[(x-\frac{7}{6})^2-\frac{25}{36}\right]$
حلول المعادلة هي: 2 ، $\frac{1}{3}$
5) $f(x)=\left[(x-1)^2-\frac{1}{5}\right]$
حلول المعادلة: $1+\frac{1}{\sqrt{5}}$, $1-\frac{1}{\sqrt{5}}$
6) $f(x)=-5\left[(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\right]$
حلول المعادلة هي: 0 ، 3؟

29
1) $x'=2, x''=3$
$x^2-5x+6=0$
2) $x'=-3, x''=\frac{1}{2}$
$2x^2+5x-3=0$
3) $x'=0, x''=3$
$x^2-3x=0$
4) $x'=x''=-2$
$x^2+4x+4=0$
5) $x'=5,\ x''=-1$
$x^2-4x-5=0$
6) $x'=-\frac{1}{3},\ x''=\frac{1}{2}$
$6x^2-x-1=0$
7) $x'=0,\ x''=-\frac{3}{2}$
$2x^2+3x=0$
8) $x'=x''=\frac{2}{3}$
$9x^2-12x+4=0$

30
1) حلين: 0 ، 3 .
2) حلين: 2- ، 2.
3) حلين: 1- ،1.
4) حلين: $-\frac{\sqrt{7}}{2}$, $\frac{\sqrt{7}}{2}$
5) لا بوجد حلول.
6) حل مضاعف: 1-.
7) حل مضاعف: 3.
8) حلين: 5 ، 1.
9) حل مضاعف: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
10) حلين : 1 ، $\frac{5}{7}$,

31 مميز المعادلة معدوم.

32 بماأن a , b متعاكسين في الإشارة فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين.

33
1) $x'=1, x''=2$
$f(x)=(x-1)(x-2)$
2) $x'=\frac{4}{3}, x''=2$
$f(x)=3(x-\frac{4}{3})(x-2)$
3) $x'=\frac{1}{3}, x''=-\frac{2}{9}$
$f(x)=-9(x-\frac{1}{3})(x+\frac{2}{9})$
4) $x'=\frac{3}{5}, x''=1$
$f(x)=-5(x-\frac{3}{5})(x-1)$
5) $x'=\frac{9-\sqrt{3}}{4}, x''=\frac{-9-\sqrt{3}}{4}$
$f(x)=2(x-\frac{9-\sqrt{3}}{4})(x+\frac{9+\sqrt{3}}{4})$

34
1) حلين: 5- ، 2.
2) حلين: 1 ، $\frac{2}{3}$.
3) لا يوجد حلول.
4) حلين: $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$
5) حلين: 19 ، 2-.

35
1) $\Delta=4(b'^2-ac)$

2) $\Delta' = b'^2 - ac$

3) إذا كان $\Delta' \geq 0$ فإن: $\Delta \geq 0$ و منه المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين هما:

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

و منه:

$$x' = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} \quad , \quad x'' = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$$

36

1) $\Delta'=100$ ، $x''=-1$, $x'=19$

2) $\Delta'=1$, $x''=-99$, $x'=-101$

3) $\Delta' = 0$, $x' = x'' = \frac{\sqrt{6}}{2}$

37

1) $\Delta = 1$, $t' = 2$, $t'' = 3$

2) $\Delta' = 81, u' = 1 , u'' = -17$

3) $\Delta = (3-\sqrt{2})^2 , x' = 3, \ x'' = \sqrt{2}$

4) $\Delta = -3$

38

1) $m \in \Re-\{-2,2\}$

2) $m=1$. $x = -\frac{2}{3}$

39

$\Delta' = m^2 + 5$

1) $x' = m - \sqrt{m^2+5}$

$x'' = m + \sqrt{m^2+5}$

2) لما $m=0$ *المعادلة تقبل حل وحيد -1.*

) لما $m?0$

$\Delta = 9$

$x' = -1$

$$x'' = \frac{3-m}{m}$$

3) لما $m=-1$ *المعادلة تقبل حل وحيد3*

. لما $m \in \left]-\sqrt{\frac{7}{8}}, \sqrt{\frac{7}{8}}\right[$ $\Delta < 0$

المعادلة لا تقبل حلول.

لما

$m \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{7}{8}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{7}{8}}, +\infty\right[$ $\Delta > 0$

المعادلة تقبل حلين متمايزين.

لما $m = \sqrt{\frac{7}{8}}$ أو $m = -\sqrt{\frac{7}{8}}$

المعادلة تقبل حل مضاعف.

4) لما $m=3$ *المعادلة تقبل حل وحيد -1.*

لما $m?3$

$\Delta = 25$

$x' = -1$

$$x'' = \frac{2+m}{3-m}$$

5) لما $m=\frac{1}{2}$ *المعادلة تقبل حل وحيد -1.*

لما $m? \frac{1}{2}$

$\Delta' = 1$

$$x' = -1 \quad , \quad x'' = \frac{2m+1}{1-2m}$$

40 إستخدام الحاسبة البيانية.

41 إستخدام الحاسبة البيانية.

42

1) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$

2)

$\Delta' = 4 - 2\sqrt{3}$

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x'' = \frac{1}{2}$$

43

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2$$

مما سبق نلاحظ أن:

$$f(x) = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

و منه حلول المعادلة هي: $\left(\sqrt{3}\right), \left(\sqrt{2}\right)$

3) نفس الحلول.

44

$8x^2 = (x+5)(12-x)$

$9x^2 - 7x - 60 = 0$

$$x' = 3 \quad , \quad x'' = -\frac{20}{9}$$

طول ضلع المربع هو: 3 m

45

$8\pi r^2 = \pi(2+r)^2$

$r^2 - 2r - 2 = 0$

$r' = 1 - \sqrt{3} \quad , \quad r'' = 1 + \sqrt{3}$

و منه نصف القطر هو $1+\sqrt{3}$.

46

$$3x^2+5x=50$$
$$3x^2+5x-50=0$$
$$x=-5\ ,\quad x=\frac{10}{3}$$

و منه طول ضلع المثلث هو: $\frac{10}{3}$

48

المعادلات 1) ، 3) ، 4) ، 5) تقبل حلين لأن $a\ ,\ b$ متعاكسين في الإشارة.
أما المعادلتين 2) ، 6) فالمميز موجب و بالتالي تقبلان حلين.
مجموع و جداء الحلين للمعادلة الأولى هو: $-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\ ,\ \frac{c}{a}=-2$
نفس الشئ بالنسبة للمعادلات الأخرى.

49

نقوم بحل المعادلة *(E')* :

$$\Delta=(x'-x'')^2$$
$$x_1=x'\ ,\ x_2=x''$$

إذن المعادلتين متكافئتين.

50

$$x^2+3x-27=0 \qquad (1$$
$$x^2-\frac{10}{3}x+1=0 \qquad (2$$
$$x^2-3x=0 \qquad (3$$
$$x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=0 \qquad (4$$
$$x^2-2x+1-m^2=0 \qquad (5$$
$$x^2-10x+23=0 \qquad (6$$

51

$$x^2-7x+4=0$$
$$\Delta=33$$
$$x'=\frac{7-\sqrt{33}}{2}\ ,\quad x'=\frac{7+\sqrt{33}}{2}$$

52

$$\begin{cases}a+b=4\\ a\times b=-1\end{cases}$$
$$S=\{(2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}),(2+\sqrt{5},2-\sqrt{5})\}$$

$$\begin{cases}a+b=-25\\ a\times b=100\end{cases}$$
$$S=\{(-20,-5),(-5,-20)\}$$

$$\begin{cases}a+b=14\\ a\times b=33\end{cases}$$
$$S=\{(3,11),(11,3)\}$$

$$\begin{cases}a+b=1+\sqrt{3}\\ a\times b=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$
$$S=\left\{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$\begin{cases}a+b=0\\ a\times b=\frac{-49}{4}\end{cases}$$
$$S=\left\{\left(\frac{7}{2},-\frac{7}{2}\right),\left(-\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)\right\}$$

$$\begin{cases}a+b=\frac{10}{21}\\ a\times b=\frac{1}{21}\end{cases}$$
$$S=\left\{\left(\frac{5-4\sqrt{6}}{21},\frac{5+4\sqrt{6}}{21}\right),\left(\frac{5+4\sqrt{6}}{21},\frac{5-4\sqrt{6}}{21}\right)\right\}$$

53

$$\begin{cases}a-b=4\\ a\times b=-1\end{cases}$$
$$S=\{(2-\sqrt{3},-2-\sqrt{3}),(2+\sqrt{3},-2+\sqrt{3})\}$$

$$\begin{cases}a-b=5\\ a\times b=8\end{cases}$$
$$S=\left\{\left(\frac{5-\sqrt{657}}{2},\frac{-5-\sqrt{657}}{2}\right),\left(\frac{5+\sqrt{657}}{2},\frac{-5+\sqrt{657}}{2}\right)\right\}$$

$$\begin{cases}a+3b=8\\ a\times b=5\end{cases}$$
$$S=\left\{\left(3,\frac{5}{3}\right),(5,1)\right\}$$

$$\begin{cases}a-3b=7\\ a\times b=-5\end{cases}$$
$$S=\left\{\left(2,-\frac{5}{2}\right),(5,-1)\right\}$$

54

$$\begin{cases} a+b=8 \\ \frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{8}{15} \end{cases}$$

$$S=\left\{\left(4-\sqrt{\frac{113}{8}},4+\sqrt{\frac{113}{8}}\right),\left(4+\sqrt{\frac{113}{8}},4-\sqrt{\frac{113}{8}}\right)\right\}$$

55

1) $x\times y=\dfrac{(x+y)^3-x^3-y^3}{3(x+y)}$

$x\times y=72$

2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x^2+y^2=145$

56

1) $\dfrac{c}{a}=-34$

2) $x^2+\dfrac{7}{34}x-\dfrac{1}{34}=0$

57

1) $\dfrac{c}{a}=-\dfrac{5}{3}$

2) $x'^2+x''^2=\dfrac{34}{9}$

$\dfrac{1}{x'}+\dfrac{1}{x''}=-\dfrac{2}{5}$

$(x'-x'')^2=\dfrac{64}{9}$

$x'^4+x''^4=\dfrac{691}{81}$

58

1) لدينا: $\begin{cases} x'+x''=\dfrac{2m}{3} \\ x'\times x''=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

و منه: $\begin{cases} x''=\dfrac{m}{6} \\ x''^2=9 \end{cases}$ $m=2$, $m=-2$

2) لدينا: $\begin{cases} x'+x''=\dfrac{1-m}{4} \\ x'\times x''=\dfrac{m}{2} \end{cases}$

و منه: $\begin{cases} 2x''=-\dfrac{m}{4} \\ x''^2+\dfrac{1}{4}x''-\dfrac{m}{2}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} m=0 \\ m=34 \end{cases}$

59

1) $m'=1-\sqrt{5}$, $m''=1+\sqrt{5}$

2) لما $m\in\left]\frac{17}{12},+\infty\right[$ لا يوجد حلول.

لما $m\in\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},\frac{17}{12}\right[$ يوجد حلين موجبين.

لما $m\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$ يوجد حلين مختلفين في الإشارة.

لما $m=\frac{17}{12}$ يوجد حل مضاعف,

لما $m=\sqrt{2}$ أو $m=-\sqrt{2}$ يوجد حل موجب و حل معدوم.

60

1) $m\in\left]-\infty,\frac{1}{5}\right[$

2) $m\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[$

3) $m\in\left]-2,3\right[$

4) $m\in\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

61

1) $m\in\left]\frac{4}{3},\frac{97}{12}\right[$

2) $m\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]\frac{3+2\sqrt{6}}{5},+\infty\right[$

3) $m\in\left]\frac{2+6\sqrt{5}}{-11},-\frac{4}{3}\right[\cup\left]1,\frac{2-6\sqrt{5}}{-11}\right[$

4) لا يوجد قيم لـ m.

62

$$\begin{cases} x'+x''=23 \\ x'\times x''=28 \end{cases}$$

$x^2-23x+28=0$

$x'\approx 1{,}28$, $x''\approx 21{,}7$

63

$$\begin{cases} 2(x'+x'')=12 \\ 2x'\times x''=9 \end{cases}$$

1) $2x^2-12x+9=0$

$x'=3-3/\sqrt{2}$, $x''=3+3/\sqrt{2}$

2) $\begin{cases} 2(x'+x'')=12 \\ 2x'\times x''>9 \end{cases}$

$-2x^2+12x-9>0$

$x'' \in \left]3-3/\sqrt{2}\ ,\ 3+3/\sqrt{2}\right[$

$X' \in \left]3-3/\sqrt{2}\ ,\ 3+3/\sqrt{2}\right[$

3) تصحيح: المستطيل له نفس محيط المربع.

$$\begin{cases} 2(x'+x'')=2m \\ x'\times x''=\frac{1}{3}m^2 \end{cases} \qquad x^2-2mx+\frac{1}{3}m^2=0$$

$$x'=\frac{2m-\sqrt{\frac{8}{3}}m}{2} \qquad x''=\frac{2m-\sqrt{\frac{8}{3}}m}{2}$$

64

1) لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-\frac{1}{2},2\right[$

لما $P(x)=0\ \ ,x=-\frac{1}{2}\ ,\ x=2$

2) لما $P(x)=0\ \ ,x=\frac{3}{2}\ ,\ x=-1$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-1,\frac{1}{2}\right[$

3) لما $P(x)=0\ \ ,x=-2\ ,\ x=1,x=3$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]1,3\right[$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-2,1\right[\cup\left]3,+\infty\right[$

4) لما $P(x)=0\ \ ,x=-\sqrt{3}\ ,\ x=\sqrt{3}$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[$

5) لما $P(x)=0\ \ ,x=-1\ ,\ x=1$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-1,1\right[$

6) لما $P(x)=0\ \ ,x=0\ ,\ x=\frac{7}{3}$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]\frac{7}{3},+\infty\right[$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]0,\frac{7}{3}\right[$

7) لما $P(x)=0\ \ ,\ x=\frac{3}{2}$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$

65

1) لما $P(x)=0\ \ ,\ x=\frac{3}{2},x=-2$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-2,\frac{3}{2}\right[$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

2) لما $P(x)=0\ \ ,\ x=\frac{2}{3},x=2$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]\frac{2}{3},2\right[$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

3) لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-\infty,+\infty\right[$

4) لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,+\infty\right[$

5) لما $P(x)=0\ \ ,\ x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right[\cup\left]\frac{3\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$

6) لما $P(x)=0\ \ ,\ x=\frac{\sqrt{15}}{5}$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,\frac{\sqrt{15}}{5}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{15}}{5},+\infty\right[$

7) لما $P(x)=0\ \ ,\ x=6$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-\infty,6\right[\cup\left]6,+\infty\right[$

8) لما $P(x)=0\ \ ,\ x=\sqrt{3}$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-\infty,\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

9) لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,+\infty\right[$

66

1) لما $P(x)=0\ \ ,\ x=\frac{3}{2}$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$

2) لما $P(x)=0\ \ ,\ x=1$

لما $P(x)>0\ \ ,x\in\left]-\infty,1\right[$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]1,+\infty\right[$

3) لما $P(x)=0\ \ ,\ x=1,x=2$

لما $P(x)<0\ \ ,x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,2\right[$

لما $P(x) > 0 \quad , x \in]2,+\infty[$

4) لما $P(x) = 0 \;,\; x = 1, x = 2, x = \frac{2}{3}$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in \left]\frac{2}{3},1\right[\cup]2,+\infty[$

لما $P(x) > 0 \quad , x \in \left]-\infty,\frac{2}{3}\right[\cup]1,2[$

5) لما

$P(x) = 0 \;,\; x = -1, x = 0, x = 1, x = 3$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in]-1,0[\cup]1,3[$

لما

$P(x) > 0 \quad , x \in]-\infty,-1[\cup]0,1[\cup]3,+\infty[$

67 1) $P(x) = (2x-3)(x^2+1)$

لما $P(x) = 0 \;,\; x = \frac{3}{2}$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in \left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$

لما $P(x) > 0 \quad , x \in \left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

2) $P(x) = (x-1)(-x^2+x-5)$

لما $P(x) = 0 \;,\; x = 1$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in]1,+\infty[$

لما $P(x) > 0 \quad , x \in]-\infty,1[$

3) $P(x) = (x-1)^2(x-2)$

لما $P(x) = 0 \;,\; x = 1, x = 2$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in]-\infty,1[\cup]1,2[$

لما $P(x) > 0 \quad , x \in]2,+\infty[$

4) $P(x) > 0 \quad , x \in \left]-\infty,\frac{2}{3}\right[\cup]1,2[$

لما $P(x) = 0 \;,\; x = 1, x = 2, x = \frac{2}{3}$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in \left]\frac{2}{3},1\right[\cup]1,+\infty[$

لما $P(x) > 0 \quad , x \in \left]-\infty,\frac{2}{3}\right[\cup]1,2[$

5) $P(x) = x(x-1)(x^2-2x-3)$

لما

$P(x) = 0 \;,\; x = -1, x = 0, x = 1, x = 3$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in]-1,0[\cup]1,3[$

لما

$P(x) > 0 \quad , x \in]-\infty,-1[\cup]0,1[\cup]3,+\infty[$

67 1) $P(x) = (x^2-1)(x^2-2)$

لما

$P(x) = 0 \;,\; x = -1, x = -\sqrt{2}, x = 1, x = \sqrt{2}$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in]-\sqrt{2},-1[\cup]1,-\sqrt{2}[$

لما

$P(x) > 0 \quad , x \in]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]-1,1[\cup]\sqrt{2},+\infty[$

2) $P(x) = (x^2-1)(x^2+4)$

لما $P(x) = 0 \;,\; x = -1, x = 1$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in]-1;1[$

لما $P(x) > 0 \quad , x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

3) $P(x) = (x^2-2)(3x^2+4)$

لما $P(x) = 0 \;,\; x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$

لما $P(x) > 0 \quad , x \in]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$

68

$P(x) = (x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+6)$

لما $P(x) = 0 \;,\; x = 3, x = \frac{1}{2}$

لما $P(x) < 0 \quad , x \in \left]\frac{1}{2};3\right[$

لما $P(x) > 0 \quad , x \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup]3,+\infty[$

69 1) لما $m = 1$ يوجد حل وحيد $\frac{2}{3}$

لما $m \neq 1$ يوجد حلين مختلفين

2)) لما $m = \frac{1}{2}$ يوجد حل وحيد $-\frac{3}{2}$

لما $m \neq \frac{1}{2}$ يوجد حلين مختلفين .

3) لما $m = 0$ يوجد حل وحيد 2.

لما $m \neq 0$.و

$m \in \left]-\infty,\frac{-5-\sqrt{28}}{3}\right[\cup \left]\frac{-5+\sqrt{28}}{3},+\infty\right[$

لا يوجد حلول

$m \in \left]\frac{-5-\sqrt{28}}{3},\frac{-5+\sqrt{28}}{3}\right[$

يوجد حلين متمايزين.

$m=\frac{-5+\sqrt{28}}{3}$ أو $m=\frac{-5-\sqrt{28}}{3}$

يوجد حل مضاعف,

4) لما $m=-1$ يوجد حلين 1 ، $\frac{3}{4}$

لما $m\neq -1$ المعادلة تصبح من الدرجة الثالثة تقبل ثلاث حلول متمايزة.

70

الشكل الأول:

$f(x)=0 \ , \ x=-3, x=1, x=4$

$f(x)<0 \quad , x\in \left]-\infty,-3\right[\cup\left]1,4\right[$

$f(x)>0 \quad , x\in \left]-3,1\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

الشكل الثاني:

$f(x)=0 \ , \ x=-2, x=-1, x=3, x=4$

$f(x)<0 \quad , x\in \left]-2,-1\right[\cup\left]3,4\right[$

$f(x)>0 \quad , x\in \left]-\infty,-2\right[\cup\left]-1,3\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

71

1) $S=\left]-\infty,-3\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

2) $S=\left[-2,\frac{1}{3}\right]$

3) $S=\left]-3,\frac{5}{2}\right[$

4) $S=\left]-\infty,\frac{5}{3}\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

5) $S=\Re$

6) $S=\phi$

7) $S=\Re$

8) $S=\phi$

9) $S=\phi$

72

1) $S=\left]-\infty,1\right[$

2) $S=\left[1,-\infty\right[$

3) $S=\left]-1,1\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

4) $S=\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

5)

73

1) $D_f=\Re-\left\{\frac{1}{2},2\right\}$

2) $S=\left\{\frac{1}{5}\right\}$

74

1) $S=\left\{\frac{1-\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right\}$

2) $S=\left\{-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right\}$

3) $S=\left\{-2,\frac{1}{6}\right\}$

4) $S=\phi$

5) $S=\phi$

75

1) $S=\left\{\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right\}$

2) $S=\left\{\frac{30-\sqrt{6}}{24},\frac{30+\sqrt{6}}{24}\right\}$

3) $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right\}$

4) $S=\{5,8\}$

5) $S=\{197,549\}$

76

1) $S=\left]-\infty,-3\right[\cup\left[-\frac{7}{3},+\infty\right[$

2) $S=\left[1,+\infty\right[$

3) $S=\{-2\}$

77

1) $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right\}$

2) $S=\left\{-2-\sqrt{8},-2+\sqrt{8}\right\}$

78

1) $S=\{3,4\}$

2) $S=\{4,9\}$

3) $S=\{4\}$

4) $S=\left\{3,\frac{1}{2}\right\}$

79

2) بعد النشر و التبسيط نجد أن المعادلتين متكافئتين.

3) $S=\{4\}$

4) $S=\left\{\frac{1}{2},3\right\}$

80

1) $S=\{1\}$

2) $S=\left]-\infty,1\right[$

81

نفرض أن: $x'\leq\frac{x'+4x''}{5}\leq x''$

لدينا: $x'\leq\frac{x'+4x''}{5}$ معناه:

بعد التبسيط $x\leq x''$.

و نفس الشئ مع $\frac{x'+4x''}{5}\leq x''$.

82

$$a+\frac{1}{a}=3$$

$$a^2-3a+1=0$$

$$a'=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad a''=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

و منه: $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

83 $x^2-5(5-x)=0$

85 (1 $2x^2+mx-3=0$

$\Delta=m^2+24$

المنحني (h) و المستقيم (d) يتقاطعان في نقطتين حيث $x\in\Re^*$

(2

$$M'\left(\frac{-m-\sqrt{m^2+24}}{4},\frac{-m-\sqrt{m^2+24}}{2}+m\right)$$

$$M''\left(\frac{-m+\sqrt{m^2+24}}{4},\frac{-m+\sqrt{m^2+24}}{2}+m\right)$$

$$I\left(\frac{-m}{4},\frac{m}{2}\right)$$

مجموعة النقط *I* هي المستقيم الذي معادلته:

Y=-2x

86 نفرض أن طول ضلع المربع *EBFI* هو *x*

نحل المعادلة: $x^2+(1-x)^2=\frac{2}{3}$

87 (1 لدينا، $S(x)=(3-x)x+(5-x)x$

$S(x)=-2x^2+8x.$

تكون *S(x)* أعظمية لما تكون $x=\sqrt{2}$

(2 نقوم بحل المعادلة: $-2x^2+8x=\frac{15}{2}$

$x=\frac{5}{2}$, $x=\frac{3}{2}$

88 (1 $P(x)=2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{3}{2}$

(2 $P(X)=2X^2$

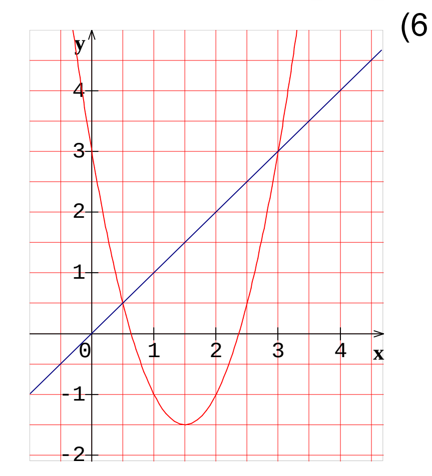
(3

x	-z	$\frac{3}{2}$	+z
f'(x)	−	0	+
f(x)	-z ↘	$-\frac{3}{2}$	↗ +z

أصغر قيمة لـ *P(x)* هي: $-\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}\le P(x)\le 23$

(5 $S=\left[\frac{1}{2},3\right]$

(6



نلاحظ أن (γ) يكون أسفل المنصف الأول لما $x\in\left]\frac{1}{2},3\right[$.

89 (1من أجل نل عدد حقيقي *x* من $\Re$:

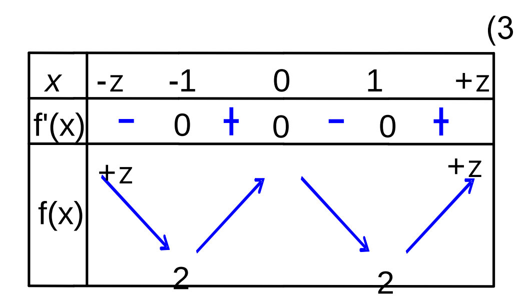
g(-x)=g(x) و منه g زوجية.

(Cg) ينطبق على (Cf) لما $x\in\Re^+$.

(2

x	-z	1	+z
f'(x)	−	0	+
f(x)	-z ↘	2	↗ +z

(3

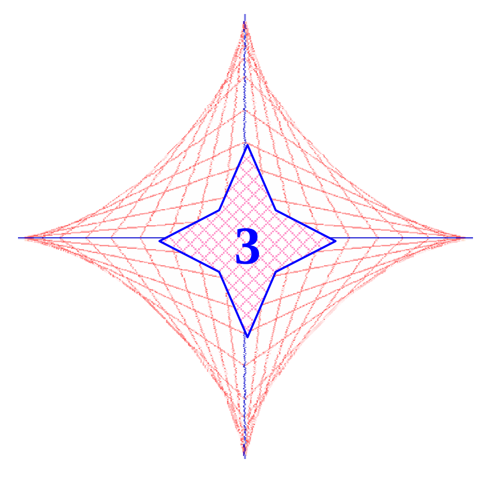


x	-z	-1		0		1	+z
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	+z ↘	2	↗		↘	2	↗ +z

(3 *f(x)* موجبة تماما على $\Re$.

(4 h(x)=f(x) من أجل كل عدد حقيقي *x*.

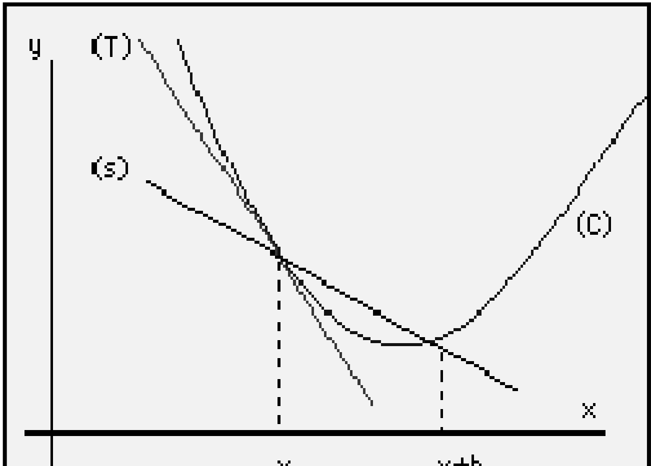
(5 $h(x)=f(x)$



الاشتقاقية

الكفاءات المستهدفة

- حساب العدد المشتق لدالة عند عدد حقيقي
- تعيين معادلة مماس منحن في نقطة منه.
- حساب مشتقات الدوال المرجعية
- حساب مشتقات الدوال $f+g$، $f \times g$، $\frac{1}{g}$، $\frac{f}{g}$، $x \mapsto f(ax+b)$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

يتم من خلال هذا الفصل تعريف العدد المشتق لدالة عند قيمة كنهاية نسبة التزايد ومن أجل ذلك يمكن اعتماد مقاربتين :

1 – مقاربة حركية تسمح بالانتقال من السرعة المتوسطة إلى السرعة اللحظية .

2 – مقاربة بيانية تجسد الانتقال من قواطع منحن عند نقطة إلى المماس في هذه النقطة .

تستعمل النهاية حدسيا دون اللجوء إلى التعريف علما أن الدوال (كثيرات الحدود ، الناطقة ، الجذر التربيعي . . .) تسمح بذلك من خلال الاختزال .

يدرج مفهوم التقريب التآلفي ويستعمل للحسابات التقريبية وتقديم طريقة أولار والتمهيد إلى المعادلات التفاضلية في البرامج اللاحقة .

الأنشطة

نشاط 1:

الهدف : إدراج مفهوم العدد المشتق بالسرعة .

1) $v_m = \frac{5(2+h)^2 - 5(2)^2}{h} = 5h + 20$.

2)

h	-0.2	-0.1	-0.05	-0.001
v_m	19	19.5	19.75	19.995
h	0.00001	0.0001	0.005	0.01
v_m	20.00005	20.0005	20.025	20.05

3) $v(2) \approx 20ms^{-1}$.

نشاط 2:

الهدف : تفسير العدد المشتق هندسيا وكتابة معادلة المماس .

1) $a = \frac{\frac{3}{4} - 4}{2 + \frac{9}{2}} = -\frac{1}{2}$ 2) $g(2) = -\frac{1}{2}$ ومنه $g(2) = a$

3) (EL) : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$.

نشاط 3: **الهدف :** تفسير السرعة اللحظية هندسيا .

1) الرسم . 2) $\frac{5(5+h)^2 - 5(5)^2}{h} = 5h + 50$

$v_m = \lim_{h \to 0} 5h + 50 = 50ms^{-1}$

3) • ترتيب النقطة M هو $5t^2$.

• معامل توجيه (AM) هو : $\frac{5t^2 - 20}{t-2} = 5(t+2)$

ونسبة تزايد d عند $t_0 = 2$: $\frac{d(t) - d(2)}{t-2} = 5(t+2)$

• للحصول بيانيا على السرعة اللحظية عند $t_0 = 2$ نقرب النقطة M نحو النقطة A .

• السرعة اللحظية هي $\lim_{t \to 2} 5(t+2) = 20ms^{-1}$ و هذا يتناسب مع التفسير الهندسي .

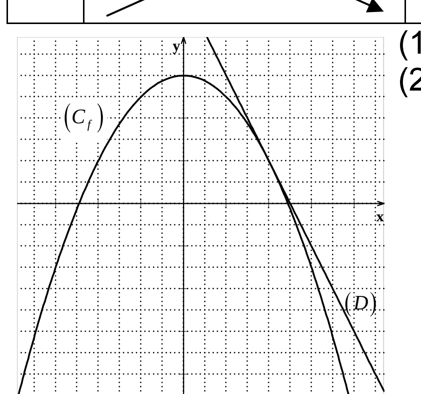
نشاط 4:

الهدف : إدراج مفهوم المماس

1)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	3	↘

1)
2)



3) $-\frac{1}{2}x^2 + 3 = -2x + 5$ تعني $(x-2)^2$

ومنه (C_f) يقطع (D) في نقطة وحيدة $A(2;1)$.

4) (D) يمس (C_f) .

الأعمال موجهة

كيفية إنشاء مماس لقطع مكافئ و لقطع زائد.

مسألة1: مماس لقطع مكافئ.

• $y = \frac{2a}{k}x - \frac{a^2}{k}$

• تقاطع (T) مع محور الفواصل : $\left(\frac{a}{2};0\right)$

• (T) يمر بالنقطتين $A\left(a;\frac{a^2}{k}\right)$ و $A'\left(\frac{a}{2};0\right)$

تطبيق: $f : x \mapsto -3x^2$ ، $k = -\frac{1}{3}$.

• المماس (T) للمنحنى ¡ عند النقطة $A(1;-3)$ يشمل النقطة $A'\left(\frac{1}{2};0\right)$

• المماس (T) للمنحنى ¡ عند النقطة $B(-2;12)$ يشمل النقطة $B'(-1;0)$.

• المماس (T) للمنحنى ¡ عند النقطة $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-1\right)$ يشمل النقطة $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};0\right)$.

مسألة2: مماس لقطع زائد.

• $D_f = \mathbb{R}^*$.

• معادلة للمماس (T) لـ H عند $M\left(a;\frac{1}{a}\right)$ هي :

$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$. • $A\left(0;\frac{2}{a}\right)$ و $B(2a;0)$.

• $\left(\frac{0+2a}{2};\frac{0+\frac{2}{a}}{2}\right) = \left(a;\frac{1}{a}\right)$.

• المماس (T) هو المستقيم (AB) • إنشاء H .

• (T_1) هو $(R'R")$ حيث $R'(0;-2)$ و $R"(-2;0)$.

• (T_2) هو $(N'N")$ ؛ $N'\left(0;-\frac{2}{3}\right)$ و $N"(-6;0)$.

• (T_3) هو $(P'P")$ حيث $P'(0;-4)$ و $P"(-1;0)$.

تقريبات تآلفية مألوفة عند0:

1) التقريب التآلفي عند 0 هو :

$f(x) \simeq f(0) + f'(0) \times x$

$f(x)=$	$(1+x)^2$	$(1+x)^3$	$\sqrt{1+x}$	$\frac{1}{1+x}$
$f(x)\simeq$	$1+2x$	$1+3x$	$1+\frac{1}{2}x$	$1-x$

$f(x)=$	$\frac{1}{(1+x)^2}$	$\cos x$	$\sin x$
$f(x)\simeq$	$1-2x$	1	x

2) $f(0,003)=\frac{1}{1+0,003}\simeq 1-0,003=0,997$

$f(-0,02)=\frac{1}{1-0,02}\simeq 1+0,02=1,02$

$f(0,003)=(1+0,003)^3\simeq 1+0,009$

$f(-0,02)=(1+(-0.02))^3\simeq 1-0,06$

$f(0,002)=(1+0,002)^2\simeq 1,004$

$f(-0,01)=(1-0,01)^2\simeq 0,98$

$f(0,004)=\sqrt{1+0,004}\simeq 1+0,002$

$f(0,01)=\sqrt{1-0,01}\simeq 1-0,005$

$f(0,01)=\frac{1}{(1+0,01)^2}\simeq 1-0,04=0,96$

$f(-0,01)=\frac{1}{(1-0,01)^2}\simeq 1+0,02=1,002$.

تطبيق:

❖ (Δ) : $y=-x+1$.

❖ $[-4,610^{-7};4,610^{-7}]$.

❖ $\frac{1}{x+1}-(1-x)=\frac{x^2}{x+1}$ و من أجل $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

ولدينا $\frac{1}{2}\le x+1\le\frac{3}{2}$ ومنه $\frac{2}{3}\le\frac{1}{x+1}\le 2$ ويعني أن

$\frac{2x^2}{3}\le\frac{x^2}{x+1}\le 2x^2$ وبالتالي $0\le\frac{x^2}{x+1}\le 2x^2$

❖ بوضع $2x^2=10^{-2}$ نجد $x=\sqrt{\frac{10^{-2}}{2}}\approx 0,071$

أو $x\approx -0,071$ إذن المجال هو $[-0,071;0,071]$.

تمارين

1 صحيح **2** خاطئ . **3** صحيح

4 صحيح **5** خاطئ **6** صحيح

7 خاطئ **8** خاطئ **9** صحيح

10 خاطئ **11** صحيح **12** صحيح

13 $f'(1)=2$

14 $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=h+2$.

15 الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1.

16 العدد $f'(2)$ هو 1- .

17 $f'(0)$ غير معرف

18 معادلة مماس المنحني للدالة f عند النقطة $A(0;-1)$ هي $y=3x+1$.

19 العدد $f'(1)$ هو 2 .

20 الدالة المشتقة f' للدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f'(x)=2x+1$.

21 $f'(-1)=0$.

22 1) $f'(0)=0$ ، 2) $f'(3)=-3$

3) $f'(-2)=-12$

23 1) $f'(-1)=1$ ، 2) $f'(1)=-3$

3) $f'(-3)=-\frac{1}{18}$ ، 4) $f'(4)=\frac{1}{\sqrt{8}}$

5) $f'(-1)=-\frac{3}{2\sqrt{3}}$ ، 6) $f'\left(\frac{1}{4}\right)=-1$

24 1) $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=4$

2) لدينا $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=4$ ، نستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل 1- و $f'(-1)=4$

3) نعم الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل 0 .

25 1) ننشر $(2+h)^3$

2) $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+6h+12)=12$

نستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 و $f'(2)=12$

26 1) $f(2+h)-f(2)=h^3-8h$

2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-8$ ، إذن $f'(2)=-8$.

27 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-2$ ، إذن $f'(2)=-2$.

28 $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=5$ ، إذن $f'(-1)=5$

29 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=1$ ، إذن $f'(3)=1$

30 $\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=1$ ، إذن $f'(-2)=1$

31 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\frac{1}{9}$ ، إذن $f'(2)=-\frac{1}{9}$

32 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\frac{1}{9}$ ، إذن $f'(2)=-\frac{1}{9}$

33 1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=-2$ ، إذن $f'(3)=-2$

2) $f'(5)=-\frac{2}{9}$ ، 3) $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{25}$

4) $f'\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{2}{7-4\sqrt{3}}$ ، 5) $f'(0)=-\frac{1}{2}$

34 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=2$ ، إذن $f'(3)=2$

35 1) $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{h+4}-2}{h}$

2) من أجل $h>-4$ و $h\neq 0$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{h+4}-2}{h}=\frac{\left(\sqrt{h+4}-2\right)\left(\sqrt{h+4}+2\right)}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h+4}+2}$$

3) $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{4}$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا $f'(1)=\frac{1}{4}$

36 نحسب $\lim_{h\to 0}\frac{f(7+h)-f(7)}{h}$

و نجد $f'(7)=\frac{1}{2\sqrt{5}}$

37 نحسب $\lim_{h\to 0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$

و نجد $f'(-3)=-\frac{1}{4}$

38 تصويب: الترقيم يبدأ من 1)

1) $f(x)=2x-7$ و $a=3$

نحسب $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ و نجد $f'(3)=2$

بنفس الطريقة نحسب $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

و نجد $f'(a)$ في باقي الحالات الأخرى.

39 نفس الطريقة المتبعة في حل التمرين رقم 38 .

40 نفس الطريقة المتبعة في حل التمرين رقم 38 .

41 1) $f:x\mapsto x^2+2$ ، $a=6$

$$f(a+h)=f(6+h)=(6+h)^2+1$$

$$f'(6)=\lim_{h\to 0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+12)=12$$

إذن العدد المشتق للدالة f من اجل $a=6$ هو $f'(6)=12$

و بنفس الطريقة نحسب $f'(a)$ في الحالات الأخرى المتبقية.

42 1) $f:x\mapsto x^2$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+6)=6$$

2) أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(3+h)$ من اجل القيم الصغيرة للعدد $|h|$ هو $f(3)+h\,f'(3)$ أي $9+6h$

43 1) $f:x\mapsto x^2+2$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h-1)-f(-1)}{h}=-2$$

2) أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(h-1)$ من اجل القيم الصغيرة للعدد $|h|$ هو $f(-1)+h\,f'(-1)$ أي $3-2h$.

44 1) نعتبر الدالة $f:x\mapsto x^2$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 2 و لدينا :

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}=4$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد $(2+h)^2$ عندما ينتهي h إلى 0 هو $f(2)+h\,f'(2)$ أي $4+4h$.

2) $2,04=2+0,04$

إذن $(2,04)^2 \cong 4+4(0,04)$ أي $(2,04)^2 \cong 4,16$

$1,98 = 2-0,02$

إذن $(1,98)^2 \cong 4+4(-0,02)$ أي $(1,98)^2 \cong 3,92$

$2,001 = 2+0,001$

إذن $(2,001)^2 \cong 4+4(0,001)$ أي

$(2,001)^2 \cong 4,004$

45 1) نعتبر الدالة $f: x \mapsto \frac{1}{x}$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 3 و لدينا :

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{3+h}\right)^2 - \frac{1}{3}}{h} = -\frac{1}{9}$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد $\frac{1}{3+h}$ عندما ينتهي h إلى 0

هو $-\frac{1}{9}h+\frac{1}{3}$.

2) $3,02 = 3+0,02$ إذن $\frac{1}{3,02} \cong -\frac{1}{9}(0,02)+\frac{1}{3}$

أي $\frac{1}{3,02} \cong 0,331111111$

و بنفس الطريقة نجد قيمة تقريبية لـ $\frac{1}{2,99}$ و $\frac{1}{3,1}$

46 1) نعتبر الدالة $f: x \mapsto x^3$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 1و لدينا :

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3-1}{h} = 3$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد $(1+h)^3$ عندما يقترب h من 0

هو $f(1)+h\,f'(1)$ أي $1+3h$.

2) $1,04 = 1+0,04$

إذن $(1,04)^3 \cong 1+3(0,04)$ أي $(1,04)^3 \cong 1,12$

$(0,96)^3 \cong 0,88$

47 1) نعتبر الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x}$

الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل القيمة 5 و لدينا :

$$f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{5+h}$ عندما ينتهي h إلى 0

هو $f(5)+h\,f'(5)$ أي $\sqrt{5}+\frac{h}{2\sqrt{5}}$.

2) $5,01 = 5+0,01$

إذن $\sqrt{5,01} \cong \sqrt{5}+\frac{0,01}{2\sqrt{5}}$

أي $\sqrt{5,01} \cong 2,238304045$

بنفس الطريقة نجد قيمة مقربة لـ $\sqrt{4,97}$ و $\sqrt{4,83}$

(بملاحظة أن $4,97 = 5-0,03$ و $4,83 = 5-0,17$)

48 1) $f(2,1) = f(2+0,1)$

أي $f(2,1) \cong 0,1\times f'(2)+f(2)$

$f(2,1) \cong 3,4$

2) $f(2,1) = f(2+0,1)$

$f(2,2) \cong 0,1\times f'(2,1)+f(2,1)$

أي $f(2,2) \cong (0,1\times 2)+3,4$ أي $f(2,2) \cong 3,6$

49 1) معادلة مماس المنحني (C) عند النقطة

$A(2;0)$ و الذي معامل توجيهه $a=1$

هي: $y = a(x-x_0)+f(x_0)$ حيث x_0 هي فاصلة A

أي $y = 1(x-2)+f(2)$

أي معادلة المماس هي $y = x-2$

❖ و بنفس الطريقة نعين المماس في الحالات الأخرى.

50 معادلة (C) هي $y = \frac{2x^2}{5}$ و $x_0 = 3$

معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 3$

هو: $f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{12}{5}$ ،

(بوضع $f(x) = \frac{2x^2}{5}$)

معادلة المماس هي : $y = f'(3)(x-3)+f(3)$ و نجد

$y = \frac{12}{5}x-\frac{18}{5}$ ، ($f(3) = \frac{18}{5}$)

و بنفس الطريقة يتم تعيين معادلة المماس للمنحني (C) في الحالات الأخرى المتبقية .

51 بوضع: $f(x) = x^2-2x$. معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة -1 هو:

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -4$$

معادلة المماس هي : $y = f'(-1)(x+1)+f(-1)$ و

نجد $y = -4x-1$ ، ($f(-1) = 3$)

52 بوضع: $f(x) = -\frac{4}{x}$ معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 هو:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 1$$

معادلة المماس هي : $y = f'(2)(x-2)+f(2)$ و نجد

$y = x-4$ ، ($f(2) = -2$)

53 بوضع: $f(x) = 2-\frac{1}{2}x^2$ ، معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 هو:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -1$$

معادلة المماس هي : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و نجد

$y = -x + \frac{5}{2}$ ، ($f(1) = \frac{3}{2}$)

من الواضح أن المماس يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $\frac{5}{2}$.

54 1) نحل المعادلة ذات المجهول x : $x^2 = -4x - 4$ و نجد $x = -2$ ، إذن (C) و (D) يتقاطعان في النقطة $A(-2;4)$.

2) نستنتج أن (D) هو المماس لـ (C) في النقطة $A(-2;4)$.

55 تصحيح : معادلة (D) : $y = -2x - 2$ وفي السؤال1) $3x^3 + 2x^2 - 5x - 4 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$ ونجد

$3x^3 + 2x^2 - 5x - 4 = (x+1)(3x^2 - x - 4)$

2) نحل المعادلة $3x^3 + 2x^2 - 7x - 6 = -2x - 2$

ونستعمل السؤال السابق ونجد $x = -1$ أو $x = \frac{4}{3}$

إذن النقطة المشتركة ذات الترتيب معدوم هي $A(-1;0)$

3) $x = -1$ هو حل مضاعف للمعادلة : $3x^3 + 2x^2 - 7x - 6 = -2x - 2$ إذن (D) مماس لـ (C) في النقطة $A(-1;0)$.

56 معادلة مماس المنحني (C) عند النقطة $A(2;4)$ هي: $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

بما أن المماس يوازي (Δ) فإن $f'(2) = 3$

إذن معادلة مماس هي $y = 3x - 2$

57 بما أن شعاع توجيه المماس $\vec{i}$ فإنه يوازي حامل محور الفواصل و بالتالي معادلته $y = -3$

(ترتيب النقطة A هو -3)

58 1) من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 3$ ، إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a و $f'(a) = 3$.

2) $f' : x \mapsto m$

59 1) من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 3a^2$ ، إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل x من $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 3x^2$.

2) معادلة مماس منحني الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = 3x - 2$

60 1) الدالة g هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -x + 2$

2) أ)

$$\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{1}{2}h + a - 2$$

ب) φ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

جـ) $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2 - a$

و $\frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \frac{1}{2}h$

و منه $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = 0$ ، إذن الدالة φ ثابتة

61 1) من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a - 5$ ، إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل x من $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 2x - 5$.

2) معادلة مماس المنحني $(\mathcal{P})$ عند النقطة $E(0;4)$ هي: $y = -5x + 4$

3) نعم توجد نقطة M من $(\mathcal{P})$ يكون مماسه عندها موازيا للمستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$ حيث فاصلة M هي $\frac{11}{4}$.

(لإيجاد هذه الفاصلة نحل المعادلة $f'(x) = \frac{1}{2}$)

4) معادلة مماس المنحني $(\mathcal{P})$ عند النقطة ذات الفاصلة a هي: $y = (2a - 5)x - a^2 + 4$

5) المنحني $(\mathcal{P})$ يشمل مماسين كل منهما يشمل المبدأ إذا كان $-a^2 + 4 = 0$ أي $(a = -2)$ أو $(a = 2)$.

62 1) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 6x^2 + 10x - 1$

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2x\cos\frac{\pi}{3} - 1$

3) الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

4) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2x^4 + 6x^2 + 10x}{(x+1)^2}$

63 الدالة $x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و بالتالي الدالة $x \mapsto x\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ومن أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

64 1) $f' : x \mapsto 6x - 4$ ، 2) $f' : x \mapsto x - \frac{1}{2}$

3) $f' : x \mapsto x + 2$

4) $f':x\mapsto 4\sqrt{3}x^3-3\sqrt{2}x^2-2\sqrt{6}x+3$

65 1) $f':x\mapsto \frac{2}{x^2}$ ، 2) $f':x\mapsto -\frac{3}{(x+2)^2}$

3) $f':x\mapsto 2+\frac{4}{(x-3)^2}$ 4) $f':x\mapsto \frac{-3x^2-10x-9}{(x^2-3)^2}$

66 1) $f':x\mapsto 3x^2$

❖ $g(x)=f(x-3)$

و منه $g'(x)=f'(x-3)=3(x-3)^2$

❖ $g(x)=f(2x+5)$

و منه $g'(x)=2f'(2x+5)=2\times 3(2x+5)^2$

❖ $g(x)=f(-3x+2)$ و منه

$g'(x)=-3f'(-3x+2)=-3\times 3(-3x+2)^2$

67 1) $f(x)=\sqrt{x}$ و

$g(x)=f(x-1)=\sqrt{x-1}$

الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$ و الدالة g معرفة على $[1;+\infty[$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و الدالة g تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$.

3) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

و $g'(x)=f'(x-1)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

❖ نتبع نفس الطريقة في الحالتين المتبقيتين.

68 1) $f'(x)=6(3x-2)$ ،

2) $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$

3) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$ ، 4) $f'(x)=\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$

5) $f'(x)=\frac{6x-3}{2\sqrt{x}}$ ،

6) $f'(x)=\frac{-5x^2+6x+15}{2\sqrt{-x+3}}$

69 1) $f'(x)=-3\sin(3x-2)$

2) $f'(x)=3\cos(3x-2)$

3) $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

4) $f'(x)=\cos(x-2\pi)\cos(x+\pi)-\sin(x+\pi)\sin(x-2\pi)$

5) $f'(x)=-2\cos 3x\sin 3x$

70 أكبر مجموعة بحيث تكون الدالة f قابلة للاشتقاق هي $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$

لدينا: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{(x+1)^2}$

$f(0,96)\cong 1,49$ ، $f(1,02)\cong 1,505$

71 1) $y=3x+4$ ، 2) $y=11x+5$ ،

3) $y=-7x+11$

72 1) معادلة المماس (T_1) لـ(C_1) عند النقطة $A(x_0,f(x_0))$ هي $y=-2x_0x+x_0{}^2+3$

و معادلة المماس (T_2) لـ(C_2) عند النقطة $A(x_0,g(x_0))$ هي $y=-\frac{2x}{x_0{}^2}+\frac{4}{x_0}$

$-2x_0=\frac{-2}{x_0{}^2}$ و $\frac{4}{x_0}=x_0{}^2+3$ فيكون $x_0=1$

إذن يوجد مستقيم (Δ) يمس المنحنيين (C_1) و (C_2) في النقطة $A(1;2)$.

2) معادلة (Δ) هي : $y=-2x+4$

3) (Δ) أعلى (C_1) ، (Δ) أعلى (C_2) في $]-\infty;0[$ و (Δ) أسفل (C_2) في $]0;+\infty[$.

73 1) $f'(x)=\frac{-\alpha x^2+(6-2\beta)x+\alpha}{(x^2+1)^2}$

2) $\alpha=4$ و $\beta=3$

74 $\alpha=-1$ و $\beta=2$

75 نناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f'(x)=0$

إذا كان $m=0$ فإنه يوجد مماس واحد.

و إذ كان $m\neq 0$ فإنه يوجد مماسان.

76 1) $DG=m-2x$ ، $DE=x\tan 60°=x\sqrt{3}$

ومنه مساحة المستطيل هي : $R(x)=-2\sqrt{3}x^2+m\sqrt{3}x$

$R'(x)=-4\sqrt{3}x+m\sqrt{3}$ ؛ $R'(x)=0$ معناه $x=\frac{m}{4}$

بما أن $R(x)$ من الدرجة الثانية و $-2\sqrt{3}<0$ فإن $R\left(\frac{m}{4}\right)$ هي القيمة الحدية الكبرى ومنه $x=\frac{m}{4}$ ولدينا $R\left(\frac{m}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}m^2$.

2) مساحة المثلث هي

$T(m)=\frac{1}{2}m\times\frac{m}{2}\tan 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2$

ومنه $R\left(\frac{m}{4}\right)=\frac{T(m)}{2}$

$T(4,002)\simeq T(4)+0,002T'(4)$

ومنه $T(4,002)\simeq 4,004\times\sqrt{3}$

و $R(2,001)\simeq 2,002\times\sqrt{3}$

77 1) $A\left(0;\frac{-8}{m}\right)$ و $B(2m;0)$

2) معادلة (AB) هي $y=\frac{4}{m^2}x-\frac{8}{m}$

المعادلة $\frac{-4}{x}=\frac{4}{m^2}x-\frac{8}{m}$ تقبل حلا مضاعفا $x=m$

و بالتالي المستقيم (AB) مماس للمنحني (H) في النقطة M.

78 1) أ) $T(h)=\frac{-12-4h}{\sqrt{16-12h-4h^2}+4}$

ب) $\lim_{h\to 0}T(h)=-\frac{3}{2}$ و منه الدالة f تقبل الاشتقاق من أجل القيمة $\frac{3}{2}$ و $f'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$

2) $v=\frac{x}{t}$ و منه $2=\frac{x}{t}$ أي $x=2t$

$OB^2=AB^2-OA^2$ و منه $OB^2=25-(2t)^2$

أي $OB=\sqrt{25-4t^2}$

إذا كان $x=3$ فإن $t=\frac{3}{2}$ ، $f(t)=\sqrt{25-t^2}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{3}{2}+h\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{h}=-\frac{3}{2}$$

79 1) ننشر $(R+x)^2$ فيكون

$$g=g_0\times\frac{R^2}{R^2\left(1+\frac{2x}{R}+\left(\frac{x}{R}\right)^2\right)}$$

و منه $g=g_0\times\frac{1}{1+\frac{2x}{R}+\left(\frac{x}{R}\right)^2}$

2) $1+\frac{2x}{R}\cong 1-\frac{2x}{R}$ و $\left(\frac{x}{R}\right)^2\simeq 0$

$g\simeq g_0\times\left(1-\frac{2x}{R}\right)$

3) $g\simeq 9,785$

80 1) ننشر $(x-a)(x^2+ax-2a^2)$

2) معادلة المماس (T_a) للمنحني (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة a هي: $y=3a^2x-2a^3$

لدينا $(x^2+ax-2a^2)=(x-a)(x+2a)$

- لدراسة الوضع النسبي لـ (c_f) و (T_a) ندرس إشارة العدد $(x-a)^2(x+2a)$

إذا كان $x>-2a$ فإن (c_f) أعلى (T_a)

إذا كان $x<-2a$ فإن (c_f) أسفل (T_a)

إذا كان $x=-2a$ فإن (c_f) يقطع (T_a)

82 1) في المثلث القائم OIT ؛ $\frac{IT}{OT}=\sin x$

و $\frac{OI}{OT}=\cos x$ ، بما أن $OI=1$ نحصل على

$IT=\frac{\sin x}{\cos x}$ (لاندرج tan لكونها غير موجودة في البرنامج).

2) $A_1=\frac{1}{2}\sin x$ و $A_2=\frac{1}{2}IT\times OI=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$.

A مساحة الجزء من القرص المرفق للزاوية x ، ومساحة القرص هي $\pi R^2=\pi$ وهي مرفقة للزاوية 2π إذن :

$$A=\frac{\pi x}{2\pi}=\frac{1}{2}x$$

3) بما أن : $A_1\le A\le A_2$ فإن :

$\frac{1}{2}\sin x\le\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$ أي : $\sin x\le x\le\frac{\sin x}{\cos x}$

إذن $x\le\frac{\sin x}{\cos x}$ وبما أن في المجال $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$: $\cos x>0$

فإن: $x\cos x\le\sin x$ خلاصة $x\cos x\le\sin x\le x$

• نستنتج من هذا أن $\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1$ لأن $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

4) من الرسم نخمن النتيجة $\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}h(x)=1$

5) $f'(x)=\cos x$ ومنه $f'(0)=\cos 0=1$

ومنه : $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h-0}=f'(0)=1$

$\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}=1$ أي $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ومنه: $\lim_{x\to 0}h(x)=1$

83 **الطريقة الأولى :**

1) $d(t)=-5(t^2-12t)$ ؛ $d(t)=-5(t-6)^2+180$

ومنه القيمة الحدية العظمى للارتفاع هي $d(6)=180$.

2) السرعة في اللحظة 6 تكون معدومة .

الطريقة الثانية :

1) $d'(t)=-10t+60$

t	0		6		$+\infty$
$d'(t)$		+	0	-	
$d(t)$	0	↗	180	↘	

ومنه $d(6)=180$ هي القيمة الحدية العظمى .

2) $d'(6)=0$

84 1) لدينا $DC=f(x_0+h)-f(x_0-h)$

و $BD=2h$ ومنه $S=h\left[f(x_0+h)-f(x_0-h)\right]$

$S = h\left[f\left(x_0\right) + hf'\left(x_0\right) - f\left(x_0\right) + hf'\left(x_0\right)\right]$

أي : $S = 2h^2 f'\left(x_0\right)$

2) $S = 2\times\left(0,03\right)^2 \times 9 = 0,0162$.

85 1) أحسن تقريب تآلفي للدالة f من أجل كل عدد حقيقي x هو $f(x+h) = f(x) + hf'(x)$ ومن أجل $(-x)$ لدينا $f(-x-h) = f(-x) - hf'(-x)$

بما أن f زوجية نحصل على $f'(x) = -f'(-x)$.

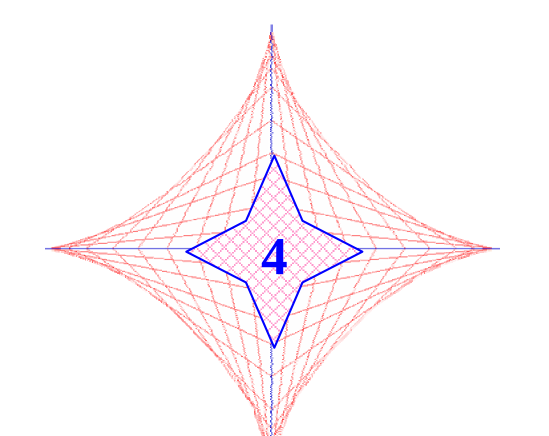
2) $g'(x) = \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$ ومنه $g'(1) = 1$

ولدينا $g(1) = 0$ إذن المعادلة $y = x-1$

الاستنتاج g زوجية ومنه g' فردية إذن :

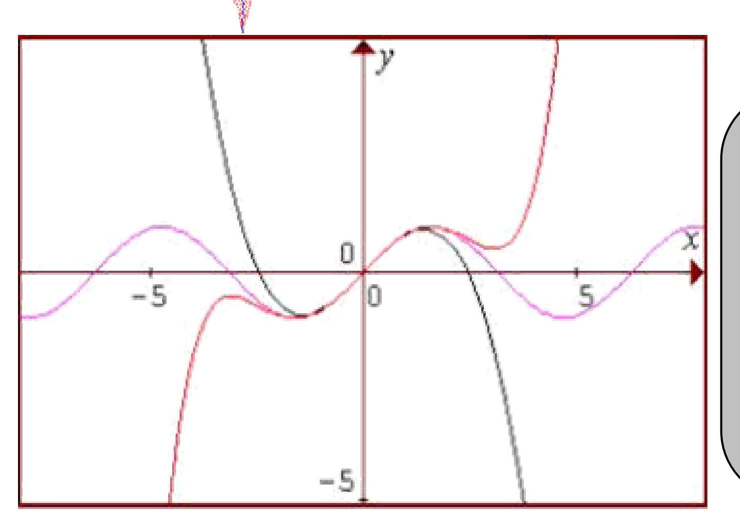
$g'(-1) = -g'(1) = -1$ و $g(-1) = g(1) = 0$

والمعادلة هي : $y = -x-1$



تطبيقات الاشتقاقية

الكفاءات المستهدفة



- تعيين اتجاه تغير دالة.
- استعمال المشتق لتعيين القيم الحدية.
- حل مسائل تستخدم فيها دوال ناطقة و دوال صماء.

تكمن أهمية هذا الفصل في الدور الهام الذي يؤديه مفهوم الاشتقاقية في تطبيقات مختلفة نذكر على سبيل المثال :

- الاستمثال .
- التقريب ،
- الحصر ،
- وصف حركة .

في هذا الفصل يدرج حساب الدالة المشتقة على مجال .

على الأستاذ أن يولي أهمية قصوى لحساب المشتقات قصد تنمية قدرات المتعلم ، المتعلقة بالحساب الجبري (المعادلات والمتراجحات) كما ينبغي على الأستاذ التطرق لمسائل الاستمثال ونمذجة وضعيات في مجالات مختلفة (هندسة ، فيزياء ، اقتصاد . . .)

الأنشطة

نشاط 1:

الهدف : العلاقة بين إشارة مشتق دالة واتجاه تغيرها.

1) f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$. k متناقصة تماما على $]0,+\infty[$.

2) $f'(x)=1$ ، $g'(x)=-2$ ، $h'(x)=2x$ و $k'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

3) من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)>0$ و $g'(x)<0$

من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ؛ $h'(x)>0$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0]$ ؛ $h'(x)<0$.

من أجل كل $x\in]0,+\infty[$ ؛ $k'(x)=<0$

4) المطلوب مؤكد .

نشاط 2:

الهدف : دراسة إشارة مشتق دالة بيانيا واستنتاج اتجاه تغير هذه الدالة.

1) $g(x)=0$ معناه $x=1$ أو $x=-\frac{1}{3}$

2) من الرسم f متزايدة تماما على $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ و $[1;+\infty[$ ؛ ومتناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{3};1\right]$.

3) من الرسم الدالة g موجبة تماما على $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup]1;+\infty[$ وسالبة تماما على $\left]-\frac{1}{3};1\right[$

وتنعدم من أجل القمتين $-\frac{1}{3}$ و 1 فقط .

4) $f'(x)=3x^2-2x-1=g(x)$.

5) إشارة f' على $\mathbb{R}$ هي نفس إشارة g .

6) f' موجبة تماما على $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup]1;+\infty[$ معناه f متزايدة تماما على $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ و $[1;+\infty[$ ؛ f' سالبة تماما على $\left]-\frac{1}{3};1\right[$ معناه f متناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{3};1\right]$.

نشاط 3:

الهدف : دراسة المماس لمنحني دالة عند نقطة التي فاصلتها تعدم مشتق هذه الدالة.

1) عين فواصل النقط M تنتمي إلى $]1;2[$.

2) عين فواصل النقط M تنتمي إلى $]-1;1[$

3) المجال $]1;2[$ تكون فيه f' موجبة تماما.

4) المجال $]-1;1[$ تكون فيه f' سالبة تماما.

5) في النقطتين $A(-1;6)$ و $B(1;2)$ ، (C_f) يقبل فيهما مماسين موازيين لحامل محور الفواصل . العدد المشتق يكون معدوما عند فاصلتي هاتين النقطتين .

نشاط 4:

الهدف : الهدف من هذا النشاط هو حصر دالة بطريقتين وملاحظة أحسن طريقة .

تصحيح : الطريقة الثانية : 2) $[-1,1]$ عوضا $[-1,0]$ و3) $[1,5]$ عوضا $[0,5]$

الطريقة الأولى :

من أجل $x\in[-1,5]$ لدينا $0\le 2x^2\le 50$

و $-20\le -4x\le 4$

ومنه $-14\le 2x^2-4x+6\le 60$.

الطريقة الثانية :

1) $T=\frac{2\left(x_2^2-x_1^2\right)-4\left(x_2-x_1\right)}{x_2-x_1}=2\left(x_1+x_2-2\right)$

2) من أجل كل x_1 و x_2 من $[-1,1]$ حيث $x_1\ne x_2$ لدينا: $-2<x_1+x_2<2$ ومنه $-8<T<0$. إذن $T<0$

ملاحظة f متناقصة تماما على $[-1,1]$.

3) من أجل كل x_1 و x_2 من $[1,5]$ حيث $x_1\ne x_2$ لدينا : $2<x_1+x_2<10$ ومنه $0<T<16$ إذن $T>0$.

ملاحظة f متزايدة تماما على $[1,5]$.

4)

x	-1	1	5
$f(x)$	12 ↘	4	↗ 36

5) من أجل كل x من $[-1,5]$ $4\le f(x)\le 36$.

6) باستعمال جدول التغيرات نجد أحسن حصر لـ $f(x)$.

الأعمال موجهة

المقارنة بين دالتين:

الهدف : كيفية المقارنة بين دالتين:

1) نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g) هي $O(0,0)$ و $A(1,1)$ و $B(2,0)$.

2) على المجال $]-\infty,0[$ (C_g) فوق (C_f)

على المجال $]0,1[$ (C_g) تحت (C_f)

على المجال $]1,2[$ (C_g) فوق (C_f)

على المجال $]2,+\infty[$ (C_g) تحت (C_f)

3) $f(x)-g(x)=-x^3+3x^2-2x$

$f(x)-g(x)=x\left(-x^2+3x-2\right)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		-	0	+		+		+	
$-x^2+3x-2$		-		-	0	+	0	-	
$f(x)-g(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

4) يمكن المقارنة بين $f(x)$ و $g(x)$ بدون اللجوء إلى (C_f) و (C_g)

مثال ثاني:

1) معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 هي $y=x-4$.

2) لدراسة الوضعية ندرس إشارة $f(x)-(x-4)$

أعمال موجهة 2 :

تصحيح : - M نقطة من القوس $\widehat{AC}$ عوضا $\widehat{AB}$ ومختلفة عن C عوضا B .

- نريد تعيين وضعية M حتى يأخذ الطول KL أصغر قيمة ممكنة عوضا أكبر قيمة ممكنة.

1) $KL^2=x^2+y^2$ (فيثاغورث)

2) $AK=KM$ و $ML=LC$.

3) $-8x-8y2xy16=0$.

تمـــاريـــن

1 صحيح 2 صحيح 3 خطأ

4 خطأ 5 صحيح 6 خطأ

7 صحيح 8 خطأ 9 صحيح

10 خطأ 11 خطأ 12 خطأ

13 خطأ 14 صحيح .

15 3) $f(x)\in[f(b);f(a)]$

16 1) منحني الدالة f يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل

17 1) المعادلة تقبل حلا واحداً .

18 3) المعادلة تقبل حلا واحدا على المجال $[0;1]$

19 1) الدالة f متزايدة تماما

20 2) المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا واحدا على $[0;1]$.

21 3) الدالة f تقبل على الأقل قيمة حدية على $]-a;a[$

22

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

23 الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[-1;1]$

24 الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالات $]-\infty;-2[$ و $]-2;2[$ و $]-2;+\infty[$.

25 الدالة f' سالبة على المجال $[a;b]$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على $[a;b]$ ، أي $f(a)>f(b)$ (الدالة المتناقصة لا تحافظ على الترتيب).

26 الدالة f' موجبة على المجال $[a;b]$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[a;b]$ ، أي $f(a)<f(b)$ (الدالة المتزايدة تحافظ على الترتيب).

27 المنحني (C_1) يرفق بالمنحني (R)

المنحني (C_2) يرفق بالمنحني (Q)

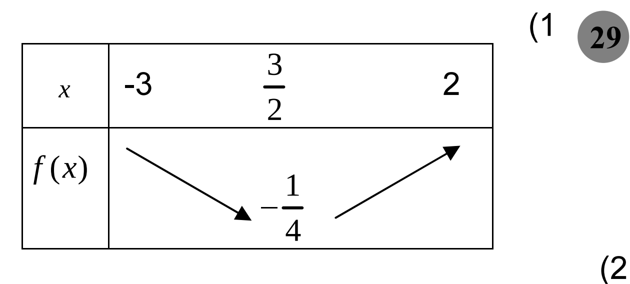
المنحني (C_3) يرفق بالمنحني (P)

28 1) $f'(x)=3x^2-3$ ، أكبر قيمة تبلغها الدالة f على المجال $[-3;1]$ هي 3 و تبلغها عند1- $[f(-1)=3]$

2) $f'(x)=-3x^2+6$ ، $\left[f(\sqrt{2})=3\sqrt{2}\right]$

3) $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ ، $[f(0)=2]$

29 (1



(2

x	-4	-1	2
$f(x)$	↗	8	↘

(3

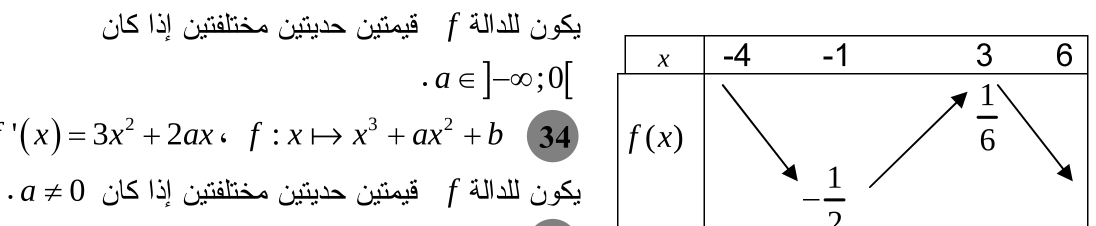
x	-5	0	2	7
$f(x)$	↗	1 ↘	-3 ↗	

(4

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	↘	2 ↗	3 ↘	2 ↗	

(5

x	-1	2
$f(x)$	↗	



(6

x	-4	-1	3	6
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{1}{6}$	↘

(7

x	$-\frac{1}{3}$	6
$f(x)$	↗	

(8

x	-7	2
$f(x)$	↘	

30 $f(x)=\frac{x^2+3}{x-2}$ ، $f'(x)=\frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;2-\sqrt{7}]$ و $[2+\sqrt{7};+\infty[$ و متناقصة تماما على كل من $[2-\sqrt{7};2[$ و $]2;2+\sqrt{7}]$

نضع $x_1=5,012013014015016$

و $x_2=5,012013014015017$

$x_1\in[2+\sqrt{7};+\infty[$ و $x_2\in[2+\sqrt{7};+\infty[$

لدينا $x_2>x_1$ و بالتالي $f(x_2)>f(x_1)$ لان الدالة f متزايدة تماما على $[2+\sqrt{7};+\infty[$ ، إذن $B>A$

31 $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2+x}$ ، $f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$ و متزايدة تماما على $[-1;1]$.

نضع $x_1=2,01401414$

و $x_2=2,01401416$

$x_1\in[1;+\infty[$ و $x_2\in[1;+\infty[$

لدينا $x_2>x_1$ و بالتالي $f(x_2)<f(x_1)$ لان الدالة f مناقصة تماما على $[1;+\infty[$ ، إذن $B<A$

32 إذا كان $a<0$ الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $\frac{4ac-b^2}{4a}$ عند $\frac{-b}{2a}$ و إذا كان $a>0$ الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى $\frac{4ac-b^2}{4a}$ عند $\frac{-b}{2a}$.

33 $f:x\mapsto x^3+ax+b$ ، $f'(x)=3x^2+a$

يكون للدالة f قيمتين حديتين مختلفتين إذا كان $a\in]-\infty;0[$.

34 $f:x\mapsto x^3+ax^2+b$ ، $f'(x)=3x^2+2ax$

يكون للدالة f قيمتين حديتين مختلفتين إذا كان $a\neq 0$.

35 $f:x\mapsto ax^2+bx+c$

إثبات أن $a>0$: لدينا $f(-1)$ قيمة حدية ، إذن $B(-1;3)$ هي ذروة للمنحني (C) و لدينا A تقع فوق B و بالتالي $f(-1)$ هي قيمة حدية صغرى ، و بما أن $f(x)$ هي دالة كثير حدود من الدرجة الثانية فإن $a>0$.

تعيين الدالة f :

نطبق الشروط $f(2)=1$ و $f(-1)=-3$ و $f'(-1)=0$ فنجد $a=\frac{4}{9}$ ، $b=\frac{8}{9}$ و $c=-\frac{23}{9}$

36 نطبق الشروط $f(1)=-1$ و $f(-1)=0$ و $f'(-1)=-\frac{13}{2}$ فنجد $a=3$ ، $b=-\frac{1}{2}$ و $c=-\frac{7}{2}$

37 (1

x	-3	1	2
$f(x)$	↘	1 ↗	

❖ في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة f ندرس إشارة مشتقتها.

38 (1 $f:x\mapsto|x^2-2x|$ ؛ $D=[0;5]$

نضع $g(x)=x^2-2x$

جدول تغيرات الدالة g هو:

x	0	1	2	5
$g(x)$	0 ↘	-1 ↗	0	15

و لدينا $f(x)=g(x)$ إذا كان $x\in[2;5]$

و $f(x)=-g(x)$ إذا كان $x\in[0;2]$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	0	1	2	5
$f(x)$	0 ↗	1 ↘	0 ↗	15

❖ في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة f نتبع نفس بالطريقة مع $f(x)=g(x)$ إذا كان $g(x)\geq 0$ و $f(x)=-g(x)$ إذا كان $g(x)\leq 0$

39 (1 $f:x\mapsto(x^2-4)(x+1)$ ؛ $D=[-3;5]$

من أجل كل x من D : $f'(x)=3x^2+2x-4$

الدالة' f تنعدم من أجل $x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$ و $x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	-3	x_1	x_2	5
$f(x)$	-10 ↗	$f(x_1)$ ↘	$f(x_2)$ ↗	$f(5)$

الدالة f تنعدم من أجل $x=-2$ أو $x=2$ أو $x=-1$

و منه جدول تغيرات الدالة $|f|$ هو

x	-3	-2	x_1	-1	x_2	2	5
$\lvert f(x)\rvert$	↘	0	↗ ↘	0	↗ ↘	0	↗

❖ في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة g نتبع نفس بالطريقة مع $g(x)=f(x)$ إذا كان $f(x)\geq 0$ و $g(x)=-f(x)$ إذا كان $f(x)\leq 0$

40 1) $f:x\mapsto 2x^3-3x^2-1$ ؛ $I=\left[\frac{3}{2};2\right]$.

من اجل كل x من I : $f'(x)=6x(x-1)$

الدالة f متزايدة تماما على I و بالتالي

$f\left(\frac{3}{2}\right)\leq f(x)\leq f(2)$ أي $-1\leq f(x)\leq 3$

و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

2) $f:x\mapsto -x^3+3x^2-3x-2$ ؛ $I=[-1;0]$.

الدالة f متناقصة تماما على I و بالتالي

$f(0)\leq f(x)\leq f(-1)$ أي $-2\leq f(x)\leq 5$

و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

❖ في الحالات الأخرى تتبع نفس الطريقة (إذا كانت f متزايدة تماما على I فإنها تحافظ على الترتيب و إذا كانت متناقصة تماما على I فإنها لا تحافظ على الترتيب).

41 تصويب : الدالة f معرفة كما يلي:

$f:x\mapsto x^3-5x^2+3x+2$ و $I=[-1;2]$

من اجل كل x من I : $f'(x)=3x^2-10x+3$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	-1	$\frac{1}{3}$	2
$f(x)$	-7 ↗	$\frac{67}{27}$ ↘	-4

المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين متمايزين على I

لأن: في المجال $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$ f متزايدة تماما و $-7\leq f(x)\leq\frac{67}{27}$

و في المجال $\left[\frac{1}{3};2\right]$ f متناقصة تماما و $-4\leq f(x)\leq\frac{67}{27}$

42 1) $f:x\mapsto x^2-3$ ؛ $D=[0;2]$.

الدالة f متزايدة تماما على D

وبالتالي $f(0)\leq f(x)\leq f(2)$ أي : $-3\leq f(x)\leq 1$

2) $f(2)\leq f(x)\leq f(8)$ (f متزايدة تماما على D)

3) $f(2)\leq f(x)\leq f(0)$ (f متناقصة تماما على D)

4) $f(1)\leq f(x)\leq f(-1)$ (f متناقصة تماما على D)

43 1) $f:x\mapsto x^2+4x+5$ ؛ $D=[-4;0]$

من أجل كل x من D : $f'(x)=2x+4$

x	-4	-2	0
$f(x)$	5 ↘	1 ↗	5

لدينا : $1\leq f(x)\leq 5$

2) $5\leq f(x)\leq 8$ ، 3) $-\frac{29}{8}\leq f(x)\leq\frac{27}{8}$

4) $2\leq f(x)\leq\frac{7}{2}$ ، 5) $2\leq f(x)\leq 7$

44 1) $f:x\mapsto x-\sin x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=1-\cos x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)\geq 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

2) معادلة (Δ) هي : $y=x$

لدراسة وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة $x-\sin x$ و نجد :

(Δ) أعلى (C_g) في $[0;+\infty[$ و (Δ) أسفل (C_g) في $]-\infty;0]$ و (Δ) يقطع (C_g) في مبدأ المعلم O

45 1) $f:x\mapsto\frac{4x^2-1}{x^2+1}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{10x}{(x^2+1)^2}$

الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

جدول تغيرات f هو:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

2) $f(x)-4=-\frac{5}{x^2+1}$

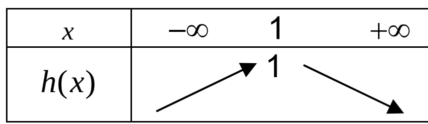
من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)-4<0$

من جدول تغيرات f ، لدينا -1 قيمة حدية صغرى لـ f

و نستنتج أن : $-1\le f(x)<4$

46

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↘	0	↗



x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	↗	1	↘

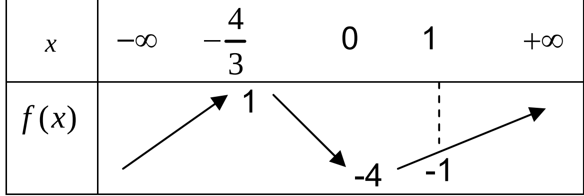
نكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة فنجد:

$$\begin{cases} f(x)=-h(x) \ ; x\le 0 \\ f(x)=h(x) \ ; 0\le x\le 1 \\ f(x)=g(x); x\ge 1 \end{cases}$$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

47 نضع $f(x)=x^3+2x^2-4$ ،

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=3x^2+4x$



x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	↗	1	↘ -4	-1	↗

على المجال $[0;1]$ الدالة f متزايدة تماما ، بما أن λ ينتمي إلى $[-4;-1]$ فإن المعادلة $f(x)=\lambda$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $x_0\in[0;1]$.

48 1) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$

(C_f) يقبل مماسا عند كل نقطة لأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

2) • المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا مضاعفا $x_0=1$

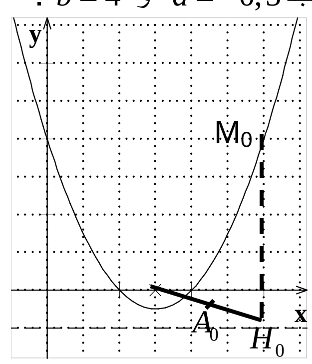
• التفسير البياني للنتيجة: المنحني (C_f) يقبل مماسا في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ هو حامل محور الفواصل.

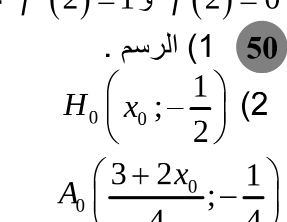
3) نحل المعادلة $f'(x)=3$ فنجد $(x=0)$ أو $(x=2)$

و منه نقط المنحني (C_f) التي يكون فيها معامل التوجيه يساوي 3 هي $A(0;-1)$ و $B(2;1)$

4) – إذا كان $c=0$ يوجد مماس واحد ، إذا كان $c>0$ يوجد مماسان و إذا كان $c<0$ لا يوجد مماس.

49 $f(x)=ax+b-\frac{6}{x}$ ، انطلاقا من الشرطين $f(2)=0$ و $f'(2)=1$ نجد $a=-0,5$ و $b=4$.





50 1) الرسم .

2) $H_0\left(x_0;-\frac{1}{2}\right)$

$A_0\left(\frac{3+2x_0}{4};-\frac{1}{4}\right)$

معامل التوجيه (A_0M_0) هو: $\dfrac{x_0^2-3x_0+2+\frac{1}{4}}{x_0-\frac{2x_0-3}{4}}=2x_0-3$.

لدينا $f'(x_0)=2x_0-3$ ومنه (A_0M_0) هو مماس للمنحني (C_f) في النقطة M_0 .

3) معامل توجيه (A_0F) هو $\frac{1}{3-2x_0}$ ولدينا :

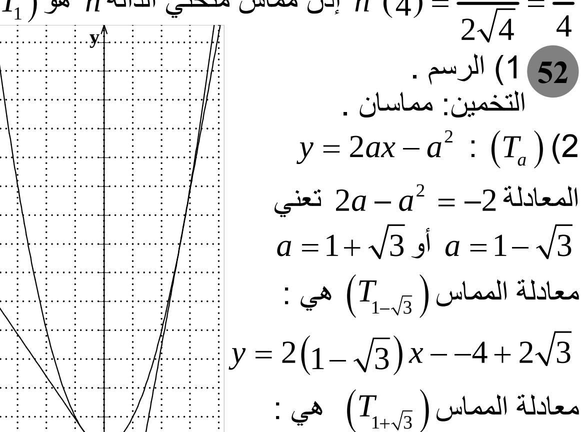
$\frac{1}{3-2x_0}\times(2x_0-3)=-1$ إذن $(A_0F)\perp(A_0M_0)$

وبالتالي A_0 هي المسقط العمودي لِـ F على المماس (A_0M_0) ولدينا ترتيب A_0 هو $-\frac{1}{4}$ إذن A_0 تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة $y=-\frac{1}{4}$.

51 $f'(4)=8$ إذن مماس منحني الدالة f هو (T_2)

$g'(4)=\frac{-1}{16}$ إذن مماس منحني الدالة g هو (T_3)

$h'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ إذن مماس منحني الدالة h هو (T_1)



52 1) الرسم .

التخمين: مماسان .

2) (T_a) : $y=2ax-a^2$

المعادلة $2a-a^2=-2$ تعني $a=1-\sqrt{3}$ أو $a=1+\sqrt{3}$

معادلة المماس $(T_{1-\sqrt{3}})$ هي :

$y=2(1-\sqrt{3})x--4+2\sqrt{3}$

معادلة المماس $(T_{1+\sqrt{3}})$ هي :

$y=2(1+\sqrt{3})x--4-2\sqrt{3}$

53 1) أ) $P'(x)=3(x-1)^2$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x $P'(x)\geq 0$ إذن p متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ومنه متزايدة على $\mathbb{R}$

ب) لدينا $2<x<2,2$ بما أن p متزايدة تماما فإن $P(2)<P(x)<P(2,2)$ أي : $-1<P(x)<-0,272$

وبالتالي $P(x)<-0,2$.

2) أ) $P(x)<-0,2$ معناه $\frac{P(x)}{(x-2)^2}<\frac{-0,2}{(x-2)^2}$ لأنه من أجل كل عدد x من $]2\,;\,2,2[$ ؛ $(x-2)^2>0$

ب) $-\frac{0,2}{(x-2)^2}<-5$ تكافئ $(x-2)^2<0.04$ و $x\neq 2$

ومعناه $2-0,2<x<2+0,2$ و $x\neq 2$ ومنه :

إذا كان $x\in\,]2\,;\,2,2[$ فإن $x\in\,]1,98\,;\,2[\cup]2\,;\,2,2[$

وهذا يعني أن $-\frac{0,2}{(x-2)^2}<-5$ ومنه $f(x)<-5$.

وبالتالي نكتفي بأخذ $a=0,2$

ت) تصحيح : $f(x)<-M$ عوضا $f(x)<-1$

بنفس الطريقة $-\frac{0,2}{(x-2)^2}<-M$ تكافئ

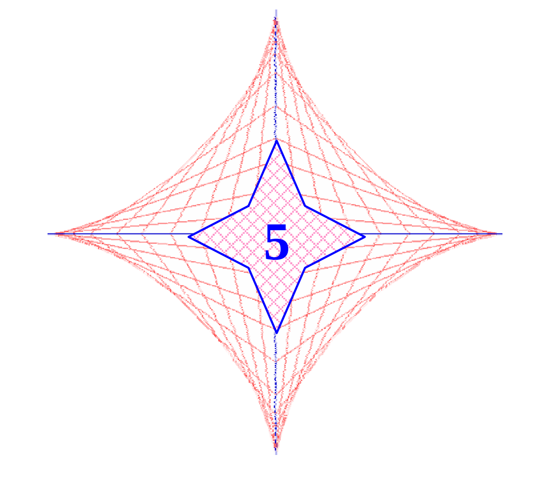
$x\in\left]2-\sqrt{\frac{0,2}{M}}\,;\,2\right[\cup\left]2\,;\,2+\sqrt{\frac{0,2}{M}}\right[$.

إذا كان $M\geq 5$ فإن $\sqrt{\frac{0,2}{M}}\leq 0,2$ وبالتالي نكتفي بأخذ $b=\sqrt{\frac{0,2}{M}}$ ولدينا : إذا كان $x\in\left]2\,;\,2+\sqrt{\frac{0,2}{M}}\right[$ فإن $x\in\left]2-\sqrt{\frac{0,2}{M}}\,;\,2\right[\cup\left]2\,;\,2+\sqrt{\frac{0,2}{M}}\right[$ وهذا يعني $-\frac{0,2}{(x-2)^2}<-M$ ومنه $f(x)<-M$.

$f'(x)=\frac{x(x-2)(x-3)^2}{(x-2)^4}$ من أجل كل $x\in\,]2;5]$

لدينا : $f'(x)\geq 0$

x	2	3	5
$f'(x)$	‖ +	0	+
$f(x)$	‖	6 ↗	6,88



النهايات
السلوك التقاربي لمنحن

الكفاءات المستهدفة

- حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- معرفة نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- حساب نهاية دالة ناطقة عند عدد a حيث a حد لمجموعة تعريف هذه الدالة.
- التفسير البياني لنهاية غير منتهية لدالة عندما يؤول x إلى x_0.
- معرفة شرط وجود مستقيم مقارب يوازي أحد محوري المعلم.
- تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب.البحث عن مستقيم مقارب مائل.
- استعمال النظريات الأولية(المجموع، الجداء، المقلوب و حاصل القسمة) لحساب نهايات.
- حساب نهايات بإزالة عدم التعيين.

❖ بعد تقديم دراسة نهايات دالة عند أطراف مجموعة تعريفها يبقى الهدف الأساسي من هذا الفصل إتمام تكوين المتعلم و جعله أكثر استقلالية فيما يخص الدراسة التامة لدالة انطلاقا من عبارتها الجبرية ثم تمثيلها بيانيا و ذلك من خلال دراسة الدوال المنصوص عليها في البرنامج و هي الدوال كثيرات الحدود و الدوال الناطقة البسيطة.

❖ يتم كذلك في هذا الفصل دراسة السلوك التقاربي لمنحني دالة من خلال تعيين المستقيمات المقاربة له (إن وجدت) و الموازية لمحور الفواصل أو محور التراتيب انطلاقا من حساب النهايات و كذلك تعيين المستقيم المقارب المائل (إن وجد) إما بعملية البحث عليه أو استنتاجه انطلاقا من العبارة الجبرية للدالة.

الأنشطة

النشاط 1 :

الهدف : نهاية غير منتهية لدالة عند عدد.

1)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	-
$f(x)$	↗	‖	↘

2)

x	2.9	2.99	2.999	2.9999
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8
x	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	10^8	10^6	10^4	10^2

3) كلما اقترب x من 3 إلا و أخذ $f(x)$ قيما كبيرة جدا.

4) إذا أخذنا مثلا $3 < x \le 3+10^{-4}$ فإن

$0<(x-3)^2 \le 10^{-8}$ و منه $\frac{1}{(x-3)^2} \ge 10^8$

5) إذا كان $3-\frac{1}{\sqrt{A}} \le x \le 3+\frac{1}{\sqrt{A}}$ مع $x \ne 3$ فإن

$0<|x-3| \le \frac{1}{\sqrt{A}}$ ومنه $0<(x-3)^2 \le \frac{1}{A}$ و بالتالي

$f(x) \ge A$

النشاط 2 :

الهدف : نهاية غير منتهية لدالة عند عدد من اليمين(اليسار).

1)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	‖	-
$g(x)$	↘	‖	↘

2)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999
$g(x)$	-10	-100	-1000	-10^4
x	1.0001	1.001	1.01	1.1
$g(x)$	10^4	1000	100	10

3) كلما اقترب x من 1 فإن $|f(x)|$ تأخذ قيما كبيرة أكثر فأكثر.

4) بفرض $1 < x \le 1+10^{-10}$ يكون $0 < x-1 \le 10^{-10}$ و منه $g(x) \ge 10^{10}$.

5) يكفي تعويض، في البرهان السابق، 10^{10} بـ A .

النشاط 3 :

الهدف : نهاية غير منتهية عند مالانهاية.

3) نلاحظ أن $k(x)$ تأخذ قيما كبيرة جدا أكثر فأكثر كلما اقترب x من العدد 1.

4) $x^2 \ge A$ يعني $x \le -\sqrt{A}$ أو $x \ge \sqrt{A}$. و بالتالي يكفي أخذ $B=\sqrt{A}$.

النشاط 4 :

الهدف : نهاية منتهية عند مالانهاية.

1) $a=2$ و $b=1$.

2)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	‖	-
$h(x)$	↘	‖	↘

3)

x	-10	-10^3	-10^5	-10^7
$h(x)$	1.9	1.999	1.999999	1.9...
x	10	10^3	10^5	10^7
$h(x)$	2.1	2.001	2.00001	2.00...

4) نلاحظ أنه كلما أخذت $|x|$ قيما كبيرة أكثر فأكثر فإن $h(x)$ تقترب من العدد2.

5) بفرض $x \ge 10^6$ يكون $0 < \frac{1}{x} \le 10^{-6}$ و بالتالي:

$2 < 2+\frac{1}{x} \le 2+10^{-6}$.

6) $2 < h(x) \le 2+e$ يعني $x \ge \frac{1}{e}$. نأخذ $B \ge \frac{1}{e}$.

النشاط 5 :

الهدف : نهاية منتهية عند عدد.

1)

x	1.997	1.998	1.999
$f(x)$	2.997	2.998	2.999
x	2.001	2.002	2.003
$f(x)$	3.001	3.002	3.003

2) نلاحظ: كلما اقترب x من 2 إلا و اقترب $f(x)$ من 3

3) من أجل $x \ne 2$ ، $f(x)=x+1$

4) $0 \le |f(x)-3| < e$ يعني $0 \le |x-2| < e$ و بالتالي يكفي أخذ $\alpha \le e$.

الأعمال الموجهة

دراسة دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة:

الهدف: التعرف على خواص دالة كثير حدود من الدرجة3

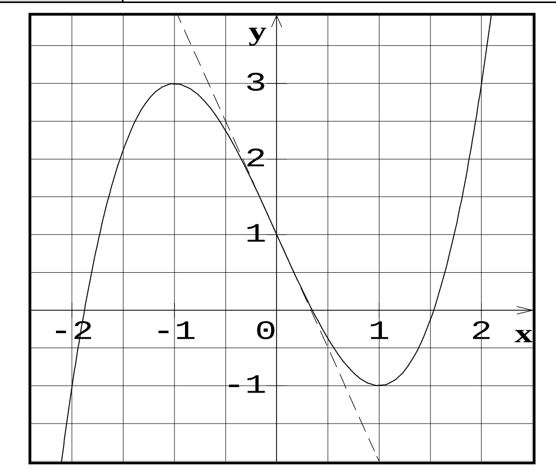
المثال: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1-3/x^2+1/x^3\right)$

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 -	0 +	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3 ↘	-1 ↗	$+\infty$

$(\Delta): y = -3x+1$

$\left[f(x)-(-3x+1)\right] = x^3$

x	-1	0	$+1$
$f(x)-y$	-	0	+



قواعد تغيير المعلم: $x = X$ و $y = Y+1$

النقطة$\Omega(0,1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f).

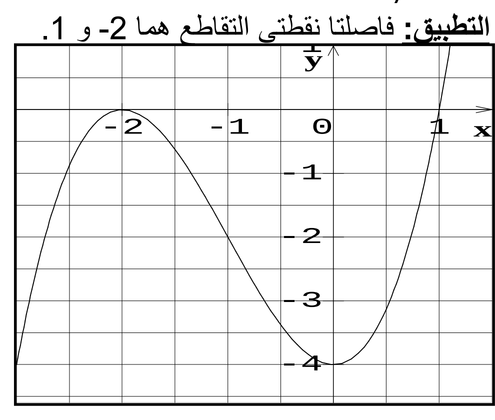
نبين أن $f(0.3)\times f(0.4) < 0$

0.3 و 0.4 هما قيمتان مقربتان للعدد α.

لدينا: $f(1.5)\times f(1.6) < 0$ و بالتالي

$1.5 < \beta < 1.6$. 1.5 قيمة مقربة إلى0.1 بالنقصان لـِ β.

التطبيق: فاصلتا نقطتي التقاطع هما 2- و 1.



مركز التناظر هي النقطة $(-1,-2)$

دراسة دالة تناظرية:

الهدف: التعرف على منحني دالة تناظرية و خواصه

التعريف: إذا كان $c = 0$ و $d \neq 0$ فإن f دالة تآلفية.

إذا كان $ad-bc = 0$ فإن f دالة ثابتة.

$$D_f = \left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$$

المثال:

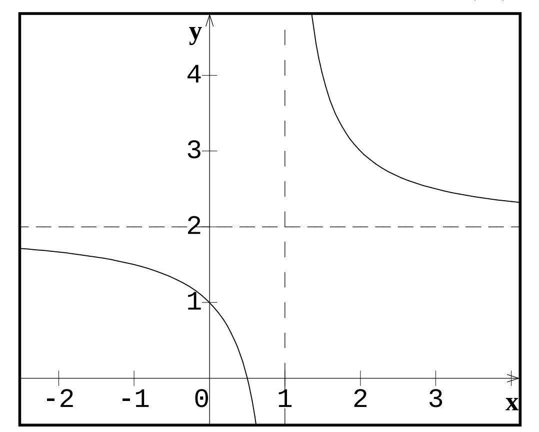
$$D_f = \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

$a = 2$ و $b = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	-
$f(x)$	2 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 2

المستقيمان المقاربان: $x = 1$ و $y = 2$

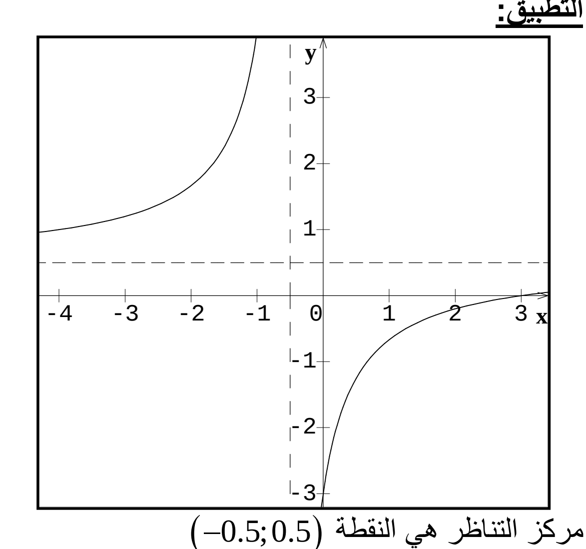
$f'(x) = -1$ يعني $x = 0$ أو $x = 2$.



قواعد تغيير المعلم: $x = X+1$ و $y = Y+2$

معادلة (C_f) بالنسبة إلى المعلم $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ هي $Y = \dfrac{1}{X}$

التطبيق:



مركز التناظر هي النقطة $(-0.5;0.5)$

تمــــاريـــن

1 صحيح.

2 صحيح.

3 صحيح.

4 خطأ.

5 خطأ.

6 (3

7 (2

8 (3

9 (3

10
$D_f = \Re$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

11
$D_f = \Re^*$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty \, , \, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$
.

12
$D_f = [-2,1[\cup]1,+\infty[$
$f(-2) = -1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty \, , \, \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty$

13 تصحيح:
$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} k(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

المنحنى الأول يمثل الدالة h.
المنحنى الثاني يمثل الدالة k.
المنحنى الثالث يمثل الدالة g.
المنحنى الرابع يمثل الدالة f.

14
(1 $-\frac{1}{5}$ (2 1
(3 $+\infty$ (4 $-\infty$.

15
(1 9   (2 9.
(3 $+\infty$ (4 $+\infty$.

16
(1 0   (2 0   (3 1.
(4 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (5 $-\infty$ (6 $+\infty$

17
(1 0 .   (2 $\sqrt{3}$.
(3 3 .   (4 $+\infty$.

18
(1 $-\frac{1}{3}$
(2 $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ >}} f(x) = +\infty$
(3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$
(4 $+\infty$.
(5 $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = +\infty$
(6 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$

19
(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
(4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
(5 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
(6 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

20
(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
(4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2 \, , \, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$

21
(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = +\infty$
(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = 3$
(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = -\infty$
(4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = -\infty$

22

1) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=+\infty$.

2) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=0$

3) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=2$

23

1) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{g(x)})=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{g(x)})=0$

3) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{g(x)})=+\infty$

24

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

4) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

5) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

6) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

7) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

8) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

9) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

10) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-4$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

25

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

3) لا يمكن حساب النهاية.

4) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

5) لا يمكن حساب النهاية.

6) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

7) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

8) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

9) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

10) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

26

1) $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

2) $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

3) $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

4) $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

5) $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=+\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

6) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

7) $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

8) $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=+\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

27

(1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

(2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

(3 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

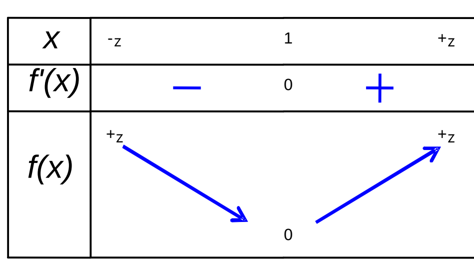
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

(5 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

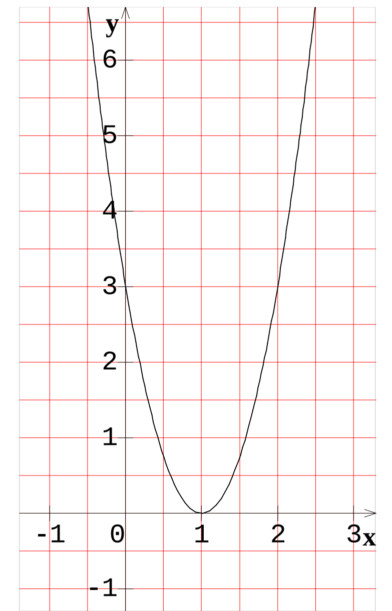
منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

28

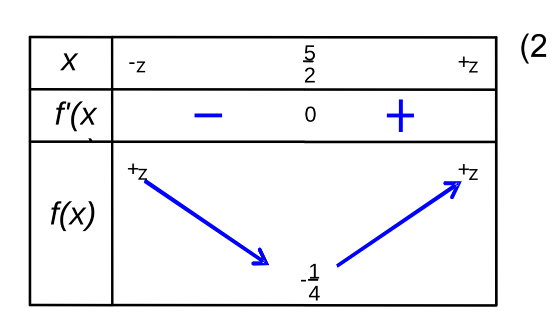
(1



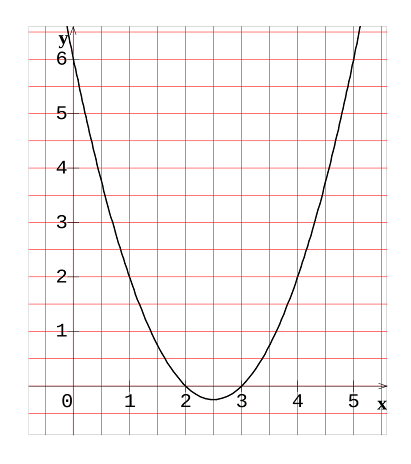
x	-z	1	+z
f'(x)	−	0	+
f(x)	+z ↘	0	↗ +z



(2

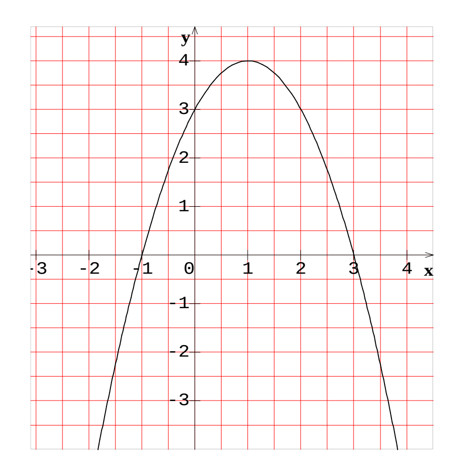


x	-z	$\frac{5}{2}$	+z
f'(x	−	0	+
f(x)	+z ↘	$-\frac{1}{4}$	↗ +z



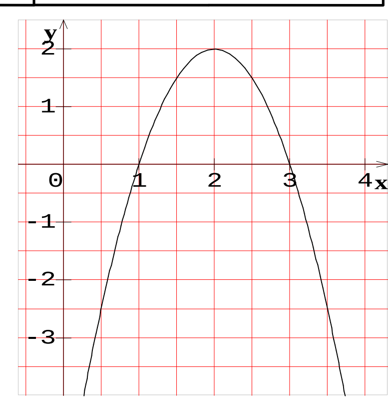
(3

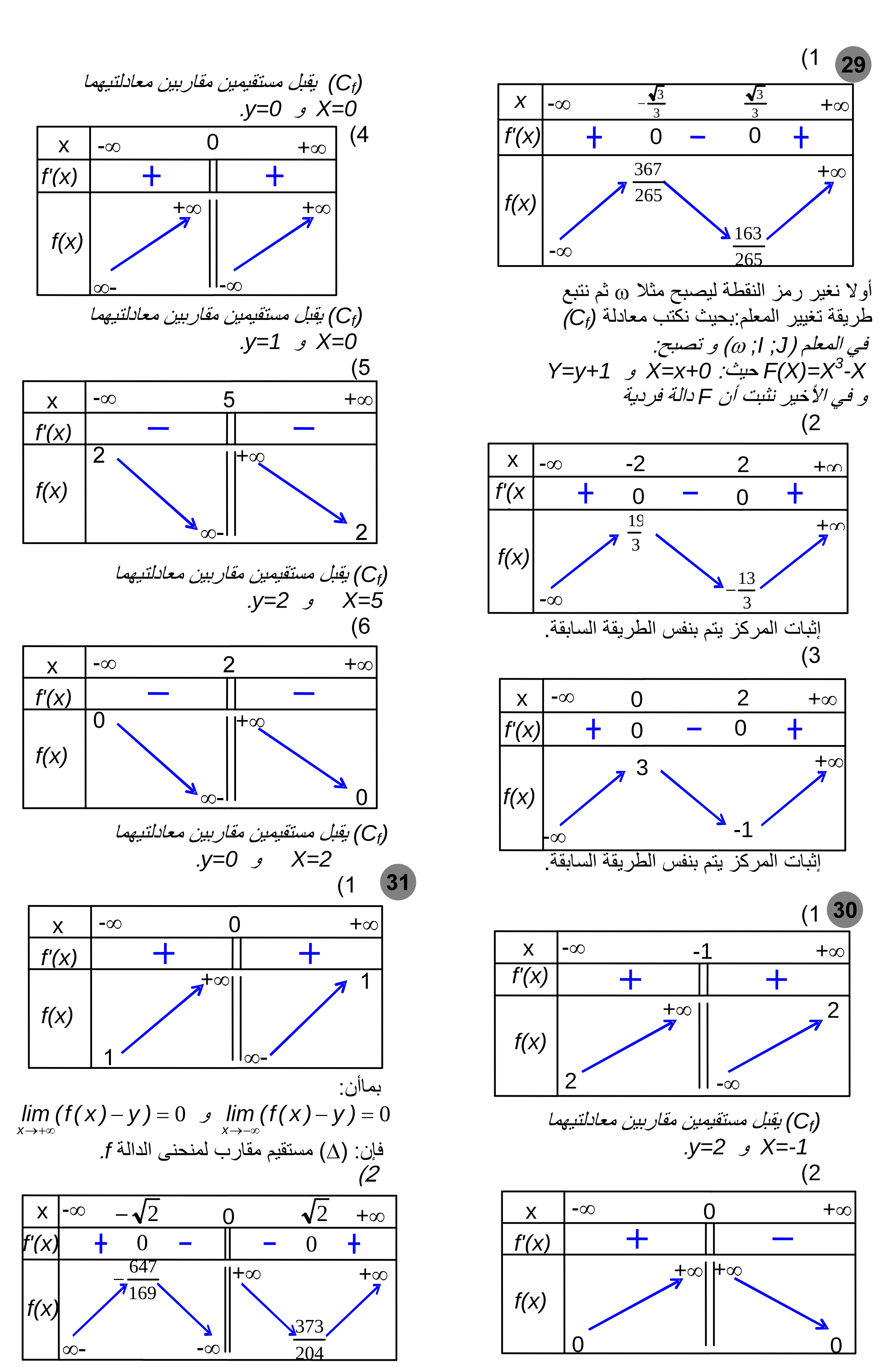
x	-z	1	+z
f'(x	+	0	−
f(x)	-z ↗	4	↘ -z



(4

x	-∞	2	-∞
f'(	+	0	−
f(x)	-∞ ↗	2	↘ -∞





29

(1

x	-∞		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		+∞
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	-∞	↗	$\frac{367}{265}$	↘	$\frac{163}{265}$	↗	+∞

أولا نغير رمز النقطة ليصبح مثلا ω ثم نتبع طريقة تغيير المعلم:بحيث نكتب معادلة (C_f) في المعلم $(\omega ;I ;J)$ و تصبح:

$F(X)=X^3-X$ حيث: $X=x+0$ و $Y=y+1$

و في الأخير نثبت أن F دالة فردية

(2

x	-∞		-2		2		+∞
f'(x		+	0	−	0	+	
f(x)	-∞	↗	$\frac{19}{3}$	↘	$-\frac{13}{3}$	↗	+∞

إثبات المركز يتم بنفس الطريقة السابقة.

(3

x	-∞		0		2		+∞
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	-∞	↗	3	↘	-1	↗	+∞

إثبات المركز يتم بنفس الطريقة السابقة.

30

(1

x	-∞		-1		+∞
f'(x)		+	‖	+	
f(x)	2	↗	+∞ ‖ -∞	↗	2

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=-1$ و $y=2$.

(2

x	-∞		0		+∞
f'(x)		+	‖	−	
f(x)	0	↗	+∞ ‖ +∞	↘	0

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=0$ و $y=0$.

(4

x	-∞		0		+∞
f'(x)		+	‖	+	
f(x)	-∞	↗	+∞ ‖ -∞	↗	+∞

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=0$ و $y=1$.

(5

x	-∞		5		+∞
f'(x)		−	‖	−	
f(x)	2	↘	-∞ ‖ +∞	↘	2

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=5$ و $y=2$.

(6

x	-∞		2		+∞
f'(x)		−	‖	−	
f(x)	0	↘	-∞ ‖ +∞	↘	0

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=2$ و $y=0$.

31

(1

x	-∞		0		+∞
f'(x)		+	‖	+	
f(x)	1	↗	+∞ ‖ -∞	↗	1

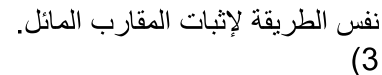
بما أن:

$\lim_{x\to -\infty}(f(x)-y)=0$ و $\lim_{x\to +\infty}(f(x)-y)=0$

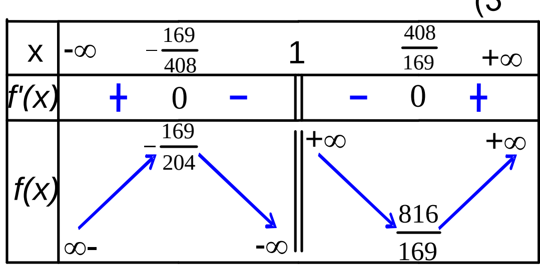
فإن: (Δ) مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f.

(2

x	-∞		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		+∞
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	-∞	↗	$-\frac{647}{169}$	↘	-∞ ‖ +∞	↘	$\frac{373}{204}$	↗	+∞


نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

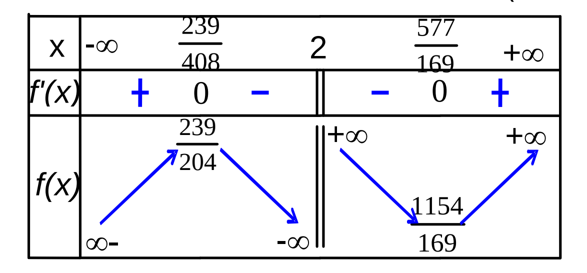
(3



x	$-\infty$		$-\frac{169}{408}$		1		$\frac{408}{169}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{169}{204}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{816}{169}$	↗	$+\infty$

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

(4



x	$-\infty$		$\frac{239}{408}$		2		$\frac{577}{169}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{239}{204}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1154}{169}$	↗	$+\infty$

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

32

المنحنى الأول يمثل الدالة f.
المنحنى الثاني يمثل الدالة g.
المنحنى الثالث يمثل الدالة h.
المنحنى الرابع يمثل الدالة k.
المنحنى الخامس يمثل الدالة l.
المنحنى السادس يمثل الدالة m.

33

(1 1 (2 0 (3 $-\frac{1}{2}$

(4 $\frac{1}{2}$ (5 4 (6 12.

(7 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$

(8 3 (9 $\frac{1}{12}$.

(10 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

(11 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

34

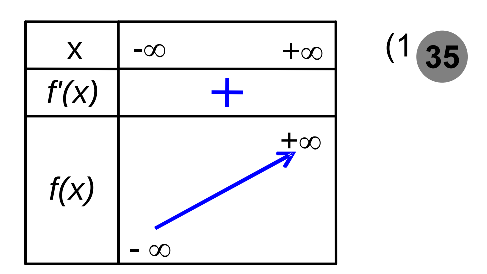
(1 0 (2 $-\infty$ (3 $+\infty$

(4 0 (5 $-\frac{3}{4}$ (6 0

(7 $\frac{1}{2}$ (8 $+\infty$.

35

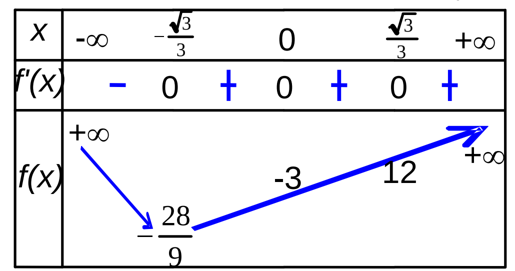
(1



x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

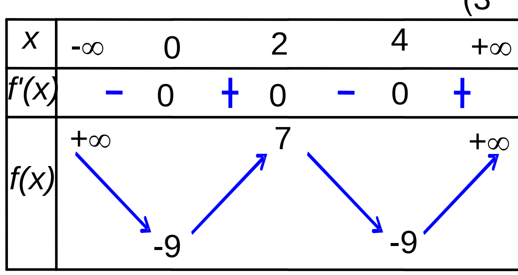
(2



x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	+	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{28}{9}$	↗	-3	↗	12	↗	$+\infty$

تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

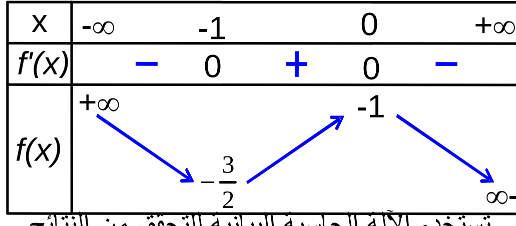
(3



x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗	$+\infty$

تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

(4

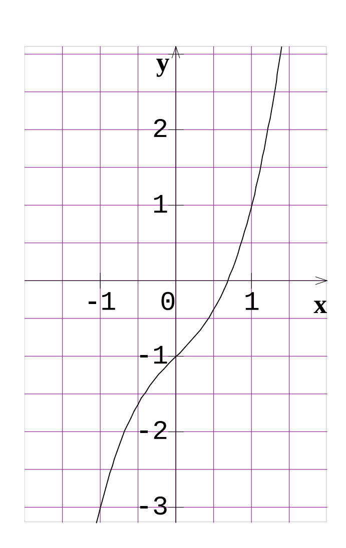


x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	-1	↘	$-\infty$

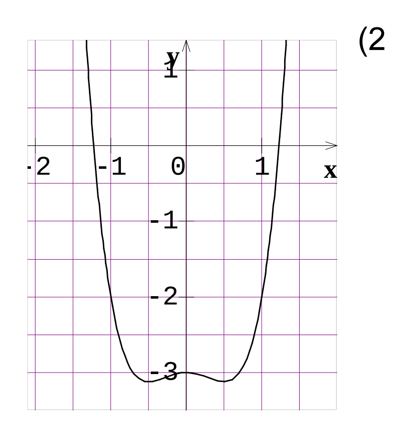
تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

36

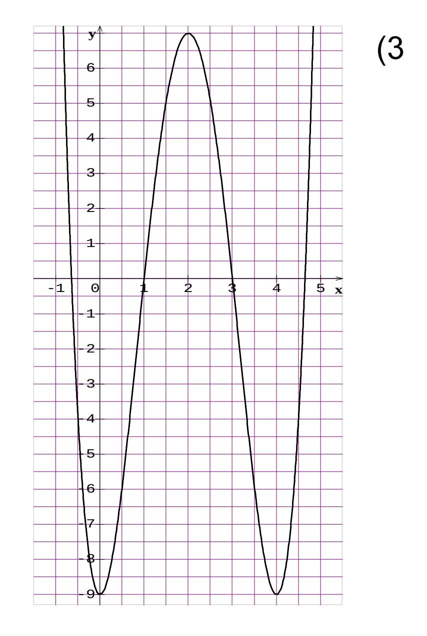
(1



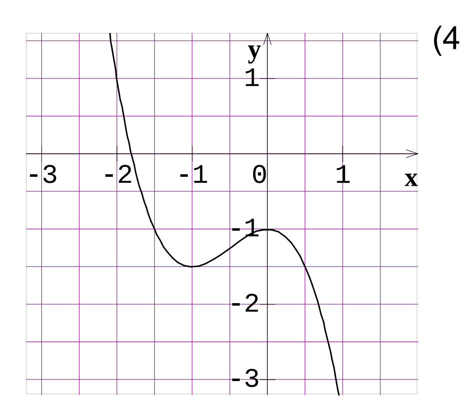
(2



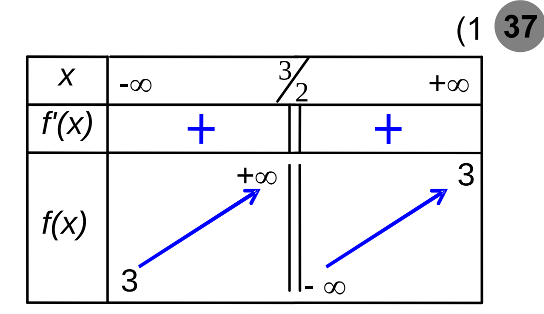
(3



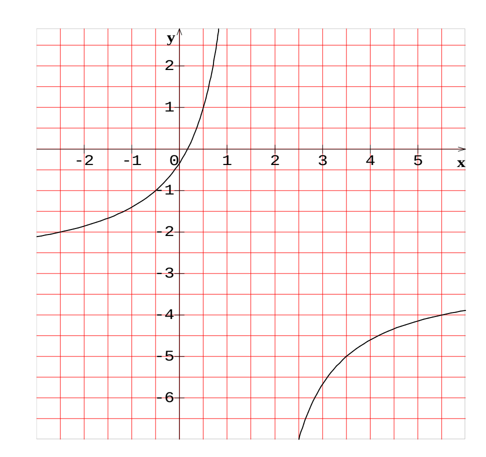
(4



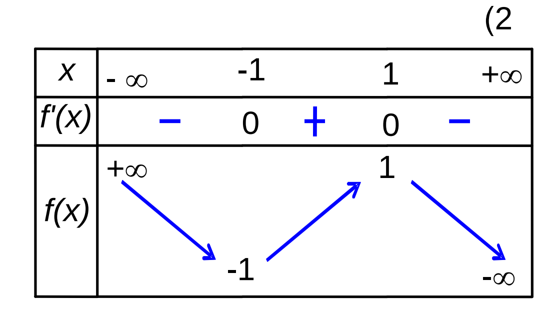
37 (1



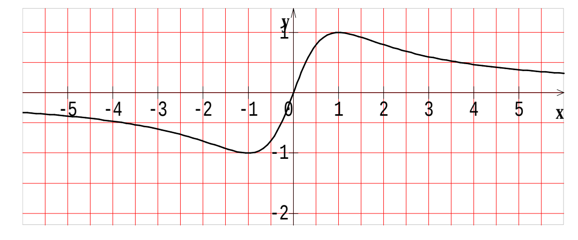
x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	
$f(x)$	3 ↗	$+\infty$	||	$-\infty$ ↗	3



(2



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	$-\infty$



الأجزاء 3) 4) 5) 6) 7) يتم الإجابة عليها بنفس الطريقة.

38 1) ليكن x عدد حقيقي من D:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$

2) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D:

$$\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}>0 \quad \text{و} \quad \sqrt{x+3}+\sqrt{x}\text{..........}(1)$$

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x}>\sqrt{x} \quad \text{و} \quad \sqrt{x+3}>0$$

أي

$$\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}<\frac{3}{\sqrt{x}}\text{.......... ......}(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D: $0\leq f(x)\leq\frac{3}{\sqrt{x}}$

3) بماأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x}}=0$ فإن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

39

1)

x	10^4	10^6	10^{10}
f(x)	1,01	1	1
x	10^{12}	10^{20}	10^{40}
f(x)	1	1	1

2) لدينا من أجل العدد الحقيقي x الموجب تماما:

$$x^2\le x^2+x+1 \quad و \quad x^2+x+1\le x^2+2x+1$$

أي

$$x^2\le x^2+x+1\le (x+1)^2$$

و منه:

$$x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$$

3) لدينا من أجل العدد الحقيقي x الموجب تماما:

$$x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$$

بحساب مقلوب العبارة نجد.

$$\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\le\frac{1}{x}$$

بضرب النتيجة بـ $x+\sqrt{x}$ مع التبسيط نجد:

$$1-\frac{1}{x+1}\le f(x)\le 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

4) بماأن:

$$\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{x}}=1 \quad و \quad \lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{1+x}=1$$

فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

40 لدينا من أجل العدد الحقيقي x من D:

$$-1\le \sin x\le +1$$

$$2\le 3+\sin x\le 4$$

بالقسمة على x نجد:

$$\frac{2}{x}\le f(x)\le\frac{4}{x}$$

2) بماأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0 \quad و \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$

فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

41 1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D:

$$-1\le \sin x\le +1$$

$$x^2-1\le x^2+\sin x\le x^2+1$$

بالقسمة على x نجد:

$$\frac{x^2-1}{x}\le f(x)\le\frac{x^2+1}{x}$$

2) بماأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty \quad و \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}=+\infty$$

فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

42 1) $0\le f(x)\le\frac{2}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$

لا يمكن حساب النهاية لما x *يؤول إلى* $+\infty$.

2) $\frac{-x}{x^2+3}\le f(x)\le\frac{x}{x^2+3}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+3}=0 \;,\; \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+3}=0$$

بنفس الطريقة يتم الإجابة على 3) و 4).

43 1) بماأن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معدلته y=3.

2) حسب إشارة الفرق $f(x)-y$.

لما $x\in]1,+\infty[$ فإن (C_f) يقع أعلى (D).

لما $x\in]-\infty,1[$ فإن (C_f) يقع أسفل (D).

44 1) a=-2 , b=3.

إجابة السؤالين 2) و 3) مثل التمرين 43 .

45 1) بماأن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=0 \quad و \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)-y=0$$

فإن: *(C) يقبل (Δ) كمستقيم مقارب.*

2) دراسة إشارة الفرق: $f(x)-y$.

46 1) *a=2 , b=6 , c=17*

نفس الطرق السابقة للإجابة على 2)

47 1)) الدالة h هي التي توفر الشروط السابقة.

2) لا يمكن تعيين قيمة a من أجل *x=1*

(الدالة k هي التي تمثيلها البياني (C) .

$(C_f)\cap(d)=\{\ \}$

2) $(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(-\frac{1}{2},0\right)\right\}$

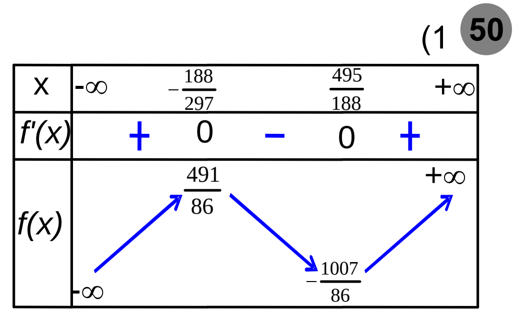
$(C_f)\cap(yy')=\{(0,1)\}$

49 1) المستقيم المقارب المائل معادلته $y=x-2$

المستقيم المقارب العمودي معادلته $x=-2$

2) $(C_f)\cap(C_g)=\{(-3,-9)\}$.

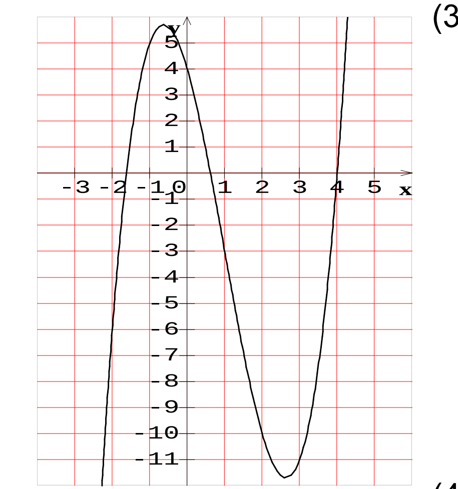
50 1)



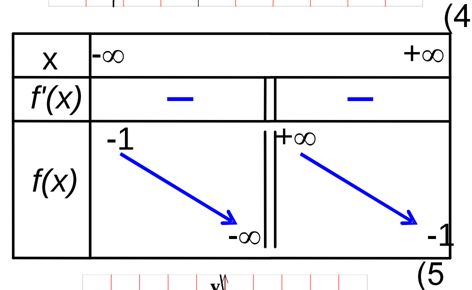
x	$-\infty$		$-\frac{188}{297}$		$\frac{495}{188}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{491}{86}$	↘	$-\frac{1007}{86}$	↗	$+\infty$

2) سبق التطرق إلى كيفية إثبات مركز التناظر.

3)

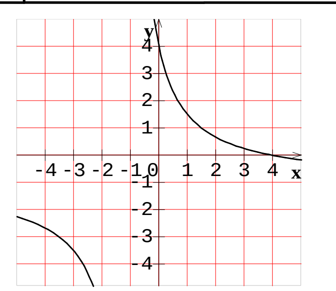


4)



x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		−	‖	−	
f(x)	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

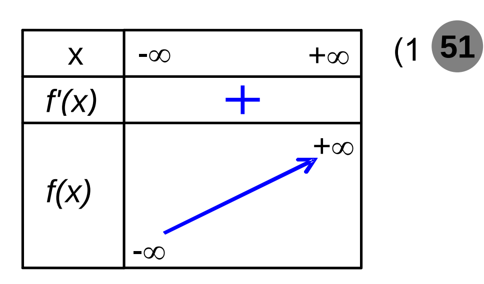
5)



6) النقطتان المتناظرتان بالنسبة للنقطة S هما:

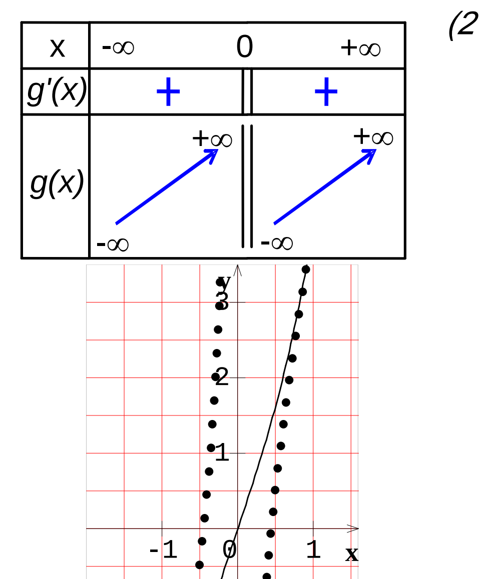
$(4\ ,\ 0)$ و $(-2\ ,\ -6)$

51 1)



x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

2)



x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		+	‖	+	
g(x)	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

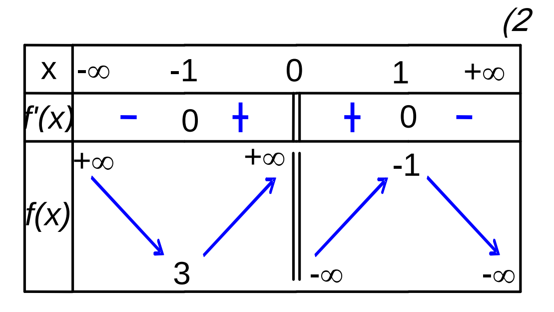
3) (d): $y=5x$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$-\frac{1}{x}$	+	−
الوضعية	(C_g) فوق المستقيم	(C_g) تحت المستقيم

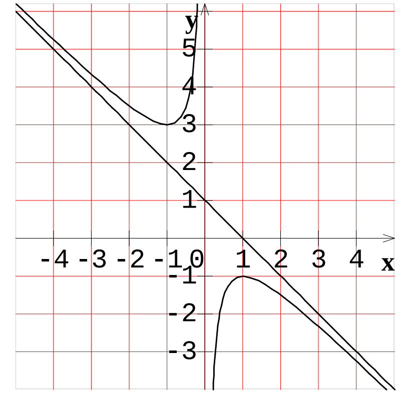
4) $(C_f)\cap(C_g)=\{(-1,-4)\ ,(1,4)\}$

52 1) سبق كيفية إثبات وجود مستقيم مقارب مائل و دراسة الوضعية النسبية.

(2



x	-∞		-1		0		1		+∞
f'(x)		−	0	+	‖	+	0	−	
f(x)	+∞	↘	3	↗	+∞ ‖ -∞	↗	-1	↘	-∞



(3 لما]m∈]-1,1 لا يوجد حلول.
لما m=-1 حل مضاعف x=1.
لما m=1 حل مضاعف x=-1.
لما [∞+,1]∪[1-,∞-]∈m يوجد حلين.

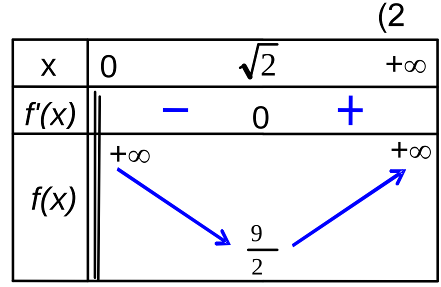
(4 $I\left(\frac{-m+1}{2},m\right)$

(5 المماس يوازي محور الفواصل معناه:
$f'(x_0)=0$ و منه:
$A(-1\ ,\ 3)\ ,\ B(1\ ,\ -1)$.
A، B و I في استقامية معناه:
$\vec{AB}\ ,\ \vec{AI}$ متوازيان. و هذا محقق.

53

1) ليكن x∈D و -x∈D:
لدينا $f(-x)=f(x)$ إذن f زوجية.

(2



x	0		$\sqrt{2}$		+∞
f'(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖ +∞	↘	$\frac{9}{2}$	↗	+∞

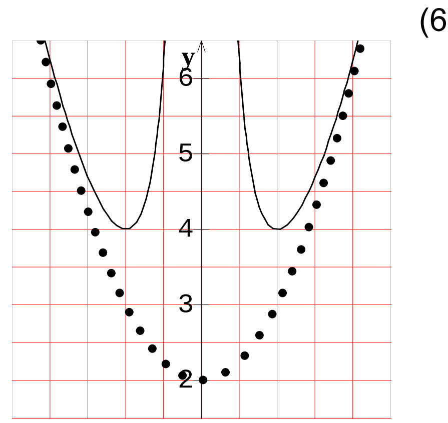
3) معادلة المستقيم المقارب هي: x=0.

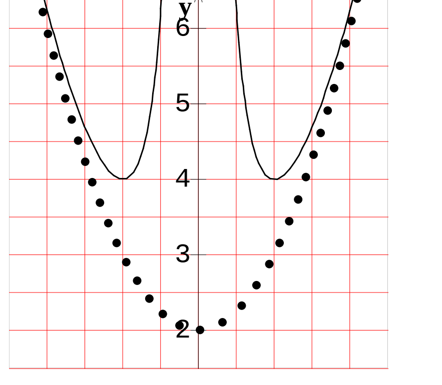
(4 $MN=\frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} MN=0\ ,\ \lim_{x\to-\infty} MN=0$.

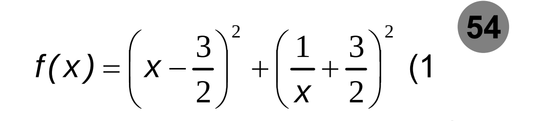
(5 (C) يقع أعلى (P) .

(6



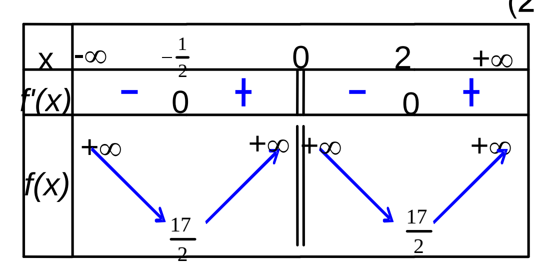


54



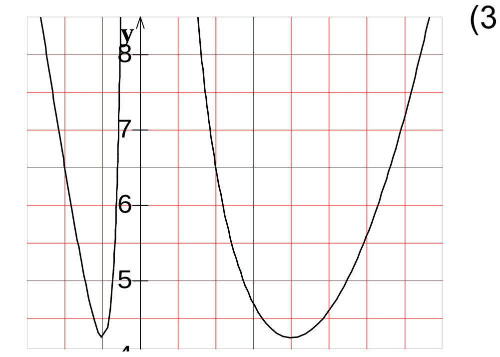
$f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\right)^2$ (1

(2

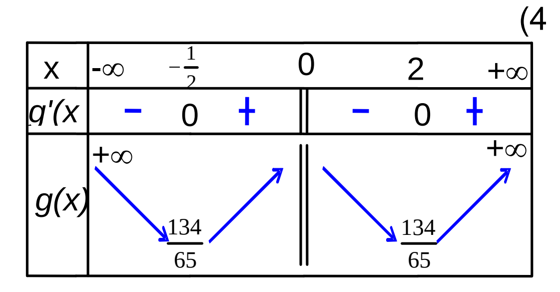


x	-∞		$-\frac{1}{2}$		0		2		+∞
f'(x)		−	0	+	‖	−	0	+	
f(x)	+∞	↘	$\frac{17}{2}$	↗	+∞ ‖ +∞	↘	$\frac{17}{2}$	↗	+∞

(3



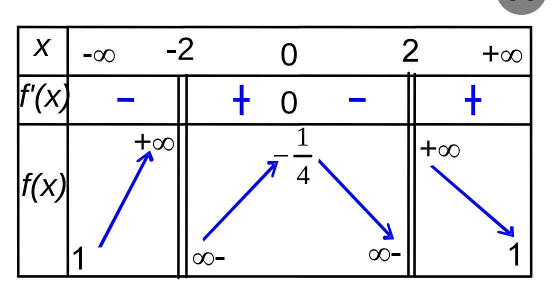
(4



x	-∞		$-\frac{1}{2}$		0		2		+∞
g'(x		−	0	+	‖	−	0	+	
g(x)	+∞	↘	$\frac{134}{65}$	↗	‖	↘	$\frac{134}{65}$	↗	+∞

(5 المسافة AM ممثلة بالدالة g و تكون لها قيمة
(6 يتعامد المماس لـ (H) في النقطة M_1 و المستقيم
(AM_1) إذا كان جداء معاملي توجيههما يساوي
-1 و هذا محقق لأن: $-\frac{1}{4}\times4=-1$
نفس الشئ بالنسبة للحالة الثانية.

55



x	-∞		-2		0		2		+∞
f'(x)		−	‖	+	0	−	‖	+	
f(x)	1	↗	+∞ ‖ -∞	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	-∞ ‖ +∞	↘	1

56 1) $D_f=\Re$

2) انطلاقا من $-1\leq \cos x \leq +1$ يمكن حصر $f(x)$ ثم الإجابة على السؤال 3).

57 1) $x=1$ ، $y=-2$ ، $y=3$.

2) يتم الرسم.

58 1) $D_f = \Re -\{1\}$

2) أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$

ب/ $x=1$ معادلة المقارب العمودي.

3) تصحيح: $x?1$

$a=-1$, $b=0$, $c=-2$

4) معادلة المقارب المائل هي: $y=x-1$.

5) $(C)\cap(d)=\{(0 , 1),(2 , 3)\}$

59 1) $\varphi(h)=h^2 + 3h + 1$

2) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{h\to0} h(x)=1$

60 تصحيح: المقام هو: x+2

1)

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)=+\infty$

2) $a=2$, $b=-1$, $c=3$

3) $y=2x-1$

4) يمكن التحقق من دلك.

5) يتم دراسة الوضعية كما سبق.

61 1) $a=1$, $b=0$, $c=2$, $d=-1$

2) $x=1$, $x=-1$, $y=x$

3) دراسة الوضعية تم التطرق لها سابقا.

62 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

(C) يقبل مستقيم مقارب معادلته: $y=2$

2) أ/ $a=2$, $b=-3$, $c=-1$

ب/ دراسة الوضعية تتم كما سبق.

63 1) لدينا: $f(x)-1=\frac{u(x)}{x^2}$

و كذلك: $0\leq\frac{u(x)}{x^2}\leq\frac{1}{x}$

و منه: $|f(x)-1|\leq\frac{1}{x}$

2) بمأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

64 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) من أجل نل عدد حقيقي x:

$f'(x)=x^2-x-2$

لما $x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ فإن: $f'(x)>0$

لما $x\in]-1,2[$ فإن: $f'(x)<0$

3)

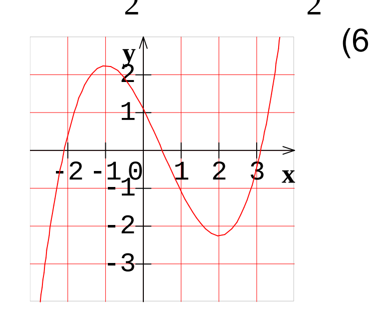
x	-∞		-1		2		+∞
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	-∞	↗	$\frac{17}{12}$	↘	$-\frac{27}{12}$	↗	+∞

4) تم التطرق لإثبات مركز التناظر.

5) للمعادلة $f(x)=0$ ثلاث حلول هي:

$x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$

6)



7) سبق التعرض لمثل هدا السؤال.

65 1) نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$-x\in\Re$ و $f(-x)=-f(x)$ إذن f فردية.

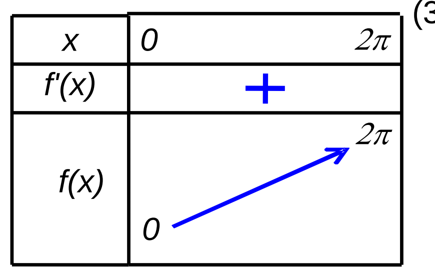
2)

$f(x+2\pi)=x+2\pi-\sin x$

$f(x+4\pi)=x+4\pi-\sin x$

$f(x+k2\pi)=x+k2\pi-\sin x$

(3



x	0		2π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2π

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$0 \le f'(x) \le 2$ و منه f متزايدة على $\Re$.

$$-1 \le -\sin x \le 1$$

(4 $x-1 \le x-\sin x \le 1+x$

$$x-1 \le f(x) \le 1+x$$

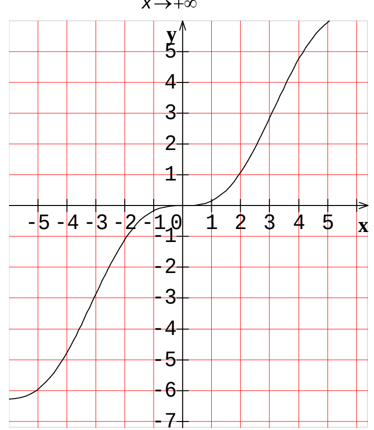
(5 لدينا:

$f(x) \ge x-1$ و $x-1 \ge A$

إذن: $f(x) \ge A$

حسب تعريف النهاية لما x يؤول إلى $+\infty$

فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



66 تصحيح: المقام هو: x-c

(1 معادلة المستقيم المقارب هي: x=c.

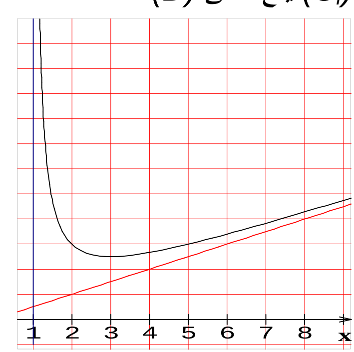
و عليه c=1.

(2 لدينا: $f(3)=\dfrac{5}{2}$ و منه: $6a+b=5$.

(3 لدينا: $f'(3)=0$ و منه: $4a-b=0$.

(4 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{x-1}$

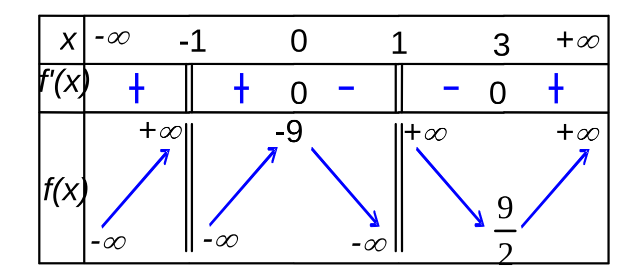
(5 (C_f) يقع أعلى (D)



67 (1 $D_f=\Re-\{1,-1\}$

(5 $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2-18x}{(x^2-1)^2}$

$$P(x)=x(x-3)(x^2+3x+6)$$



x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

68 (I (1 $D_f=\Re$

لما $x\in[0,+\infty[$ فإن: $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

لما $x\in]-\infty,0]$ فإن: $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

(2 f دالة فردية.

(3 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

(4 لما $x\in[0,+\infty[$ فإن:

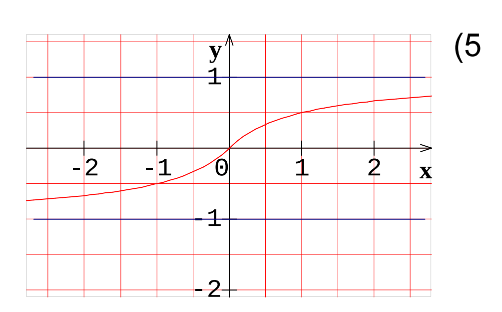
$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{f(x)}{x}=1$$

و منه f قابلة للإشتقاق عند 0.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

(5



6) لما $y \geq 0$: $x = \frac{y}{1-y}$.

لما $y \leq 0$: $x = \frac{y}{1+y}$.

7) الحل الوحيد على $\Re$ للمعادلة $f(x)=y$ هو

$x = \frac{y}{1-|y|}$.

II) 1) $D_g=\Re-\{-1,1\}$

2) لما $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0]$ فإن: $g(x) = \frac{x}{1+x}$

لما $x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$ فإن: $g(x) = \frac{x}{1-x}$

3) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = +\infty$

4) $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{g(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)}{x} = 1$

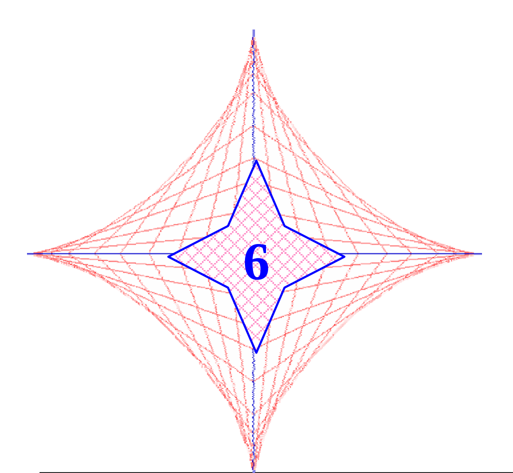
x	-1 $\quad\quad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5)

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال]1- ، 1[:

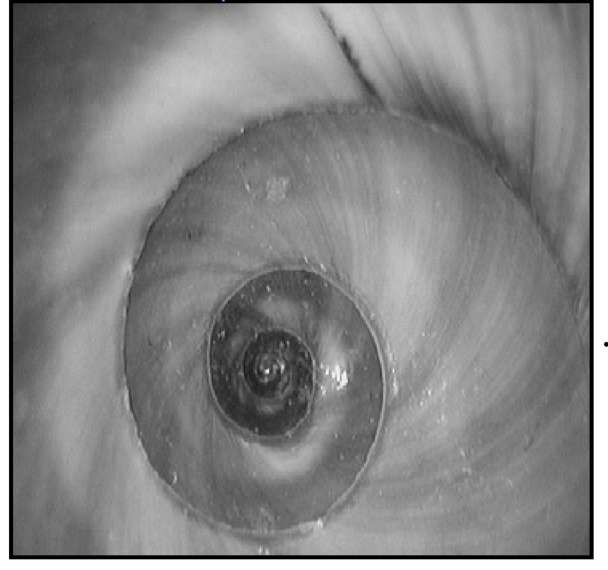
$(f \circ g)(x) = x$

6) نستنتج أن المنحنيين متناظرين بالنسبة إلى (D) .



المتتاليات العددية

الكفاءات المستهدفة



- وصف ظاهرة بواسطة متتالية.
- التعرف على اتجاه تغير متتالية.
- التعرف على متتالية حسابية (هندسية).
- حساب الحد العام لمتتالية حسابية (هندسية).
- حساب مجموع p حدا متعاقبا.
- حساب نهاية متتالية عددية.

يتم تعريف المتتالية بطريقتين :

- الحد العام u_n بدلالة n مما يظهر مفهوم الدالة العددية لمتغير طبيعي .
- العلاقة التراجعية .

يسمح هذا الفصل باستعمال مختلف تكنولوجيات الإعلام والاتصال (الآلة الحاسبة ، المجدول ، راسمات المنحنيات) .بطريقة فعالة تمكن المتعلم من وضع تخمينات تبرر بالحسابات الجبرية .

نقبل أن متتالية تراجعية تعرف بإعطاء حدها الأول وعلاقة تراجعية بين حدين متتابعين .

لضمان وجود كل حدود المتتالية التي حدها الأول u_0 والمعرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة عددية ، نفرض من أجل ذلك أن f مستقرة على مجال I يشمل u_0

يمهد حدسيا من خلال هذا الفصل للبرهان بالتراجع الموجود في البرامج اللاحقة .

الأنشطة

نشاط 1 :

الهدف : تعريف متتالية بحدها العام .

$u_5 = 5\times 5 = 25$ ، $u_6 = 6\times 5 = 30$ ،

$u_7 = 7\times 5 = 35$ ، $u_8 = 8\times 5 = 40$ ؛

$u_{18} = 18\times 5 = 90$ ، $u_{120} = 120\times 5 = 600$

و $u_n = 5n$.

نشاط 2 :

الهدف : تعريف متتالية بعلاقة تراجعية .

1) $u_5 = 10$ ، $u_6 = 15$ ، $u_7 = 21$ ، $u_8 = 28$.

2) $u_{n+1} = u_n + n - 1$

3) $u_{13} = u_8 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 28 + 50 = 78$

نشاط 3 :

الهدف : حساب الحدود باستعمال العلاقة التراجعية .

1) $u_{n+1} = u_n + 4$. $u_0 = 1$ ، $u_1 = 5$ ،

$u_2 = 29$ ، $u_3 = 885$ ، $u_4 = 714029$.

2) $u_{n+1} = u_n + 4$.

نشاط 4 :

الهدف : تمثيل الحدود واتجاه تغير متتالية .

1)الرسم

إحداثيات نقطتا التقاطع هي :

$(1;2)$ ؛ $(0;1)$

2) في المعلم $(O';\vec{i};\vec{j})$

(C_g) : $y = x^2$

(Δ) : $y = x$

ومنه $f(x) = x^2$

3) لدينا $u_1 = f(u_0)$

ومنه ترتيب A هو u_1 هو

كذلك ترتيب B وبما أن

$B \in (\Delta)$ فإن $B(u_1;u_1)$

4) بما أن $u_0 \in [0;1]$ فإن كل الحدود u_n تنتمي إلى $[0;1]$

ومنه : $0 < u_n^2 < u_n < 1$ وبالتالي $u_{n+1} < u_n$ إذن الدالة u متناقصة تماما . بينما الدالة f متزايدة تماما على $[0;1]$

نشاط 5 :

الهدف : المقارنة بين متتالية حسابية ومتتالية هندسية.

A .1) $u_2 = u_1 + \frac{1}{10}u_1 = 11000$ ، $u_3 = 12100$ ،

$u_4 = 13310$ ، $u_5 = 14641$ ، $u_6 = 16105{,}1$

، $u_7 = 17715{,}61$.

2) $u_{n+1} = 1{,}1\,u_n$

B .1) $v_2 = v_1 + 1200 = 11200$ ، $v_3 = 12400$ ،

$v_4 = 13600$ ، $v_5 = 14800$ ، $v_6 = 16000$ ،

$v_7 = 17200$.

2) $v_{n+1} = v_n + 1200$.

3) العقد الأول (مرتب u_n) أكثر فائدة

الأعمال الموجهة

الوسط الحسابي:

الهدف : استغلال الوسط الحيابي لاختصار الحسابات:

1) نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$u_{n+1} = u_n + r$ و منه $u_{n-1} = u_n - r$

و بالتالي $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$ (الجمع طرف بطرف).

2) نفس الطريقة $a + c = 2b$

تطبيق:

بتطبيق الوسط الحسابي نجد $b = 5$.

و منه $a = 2$ و $c = 8$.

أو $a = 8$ و $c = 2$.

الوسط الهندسي:

الهدف : استغلال الوسط الهندسي لاختصار الحسابات:

1) نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$u_{n+1} = u_n \times r$ و منه $u_{n-1} = u_n / r$

و بالتالي $u_{n+1} \times u_{n-1} = u_n^2$ (الضرب طرف بطرف).

2) نفس الطريقة $ac = b^2$

تطبيق:

بتطبيق الوسط الهندسي نجد $b = 6$.

و منه $a = 2$ و $c = 18$.

أو $a = 18$ و $c = 2$.

نهاية مجموع حدود متتالية هندسية:

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

1) $\underline{q = 0}$ $S_n = u_0$ و $\lim_{n\to+\infty} S_n = u_0$

2) $\underline{q = 1}$ $S_n = u_0 + u_0 + ... + u_0$ أي $S_n = (n+1)u_0$

و منه إذا كان $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

إذا كان $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

3) $q \neq 0$ و $q \neq 1$. $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$q > 1$ و $u_0 > 0$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

$q > 1$ و $u_0 < 0$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

$-1 < q < 1$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1 - q}$ لأن $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$

$q \leq -1$ نهاية S_n غير موجودة

تطبيق:

الحالة $\underline{q = 0}$ غير واردة

من أجل $\alpha = 2$: $q = 1$

و $S_n = 3(n+1)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

من أجل $0 < \alpha < 2$: $q > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

من أجل $-2 \le \alpha < 0$ $q \le -1$ نهاية S_n غير موجودة

من أجل $\alpha < -2$ أو $\alpha > 2$: $-1 < q < 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{3\alpha}{\alpha - 2}$.

متتالية غير رتيبة:

1) $u_{n+1} - u_n = (-2)^{n+1} - (-2)^n$

$$u_{n+1} - u_n = (-2)^n(-2) - (-2)^n$$
$$= (-2)^n(-3)$$

2) إذا كان ن زوجي $u_{n+1} - u_n < 0$

إذا كان ن فردي $u_{n+1} - u_n > 0$

3) (u_n) ليست رتيبة

تطبيق:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$u_n = (3)\left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

$$u_{n+1} - u_n = 3\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 3\left(-\frac{3}{2}\right)^n$$
$$= 3\left(-\frac{3}{2}\right)^n\left(-\frac{3}{2} - 1\right)$$
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

و الإشارة ليست ثابتة ، إذا (u_n) ليست رتيبة

دراسة متتالية تراجعية:

$u_0 = a$ $(a \in \mathbb{R})$، و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 \ .$$

الجزء الأول : $a = \dfrac{7}{4}$.

1)

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$\frac{1}{2}x^2 - x$	+ 0 - 0 +

2) على المجال $]0,2[$ $\frac{1}{2}x^2 - x < 0$ و منه

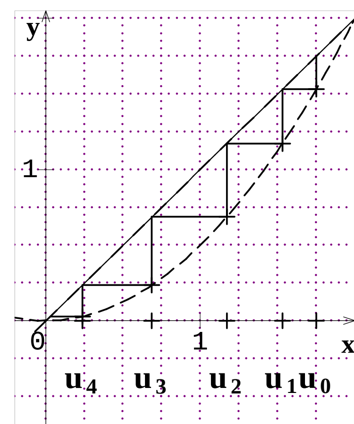
على المجال $]0,2[$ $\frac{1}{2}x^2 < x$ و بالتالي

على المجال $]0,2[$ $0 \le \frac{1}{2}x^2 < x \le 2$

3)

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↗ $+\infty$

4)



5) الرسم يوحي باتجاه تغيرات المتتالية و هي متناقصة

6) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n$

من السؤالين الأول و الثاني نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة على ط ..

من دراسة الدالة f يتبين أن (u_n) و f ليس لهما نفس اتجاه التغير .

الجزء الثاني : $a = 4$.

1) $x > 2$ و منه $x^2 > 4$ و منه $\frac{1}{2}x^2 > 2$

أي $f(x) > 2$

بما أن $u_0 > 2$ فإن $u_1 > 2$ و منه $u_2 > 2$ وهكذا حتى $u_n > 2$

2)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n$$
$$= \frac{1}{2}u_n(u_n - 2)$$

و منه نستنتج أن (u_n) متزايدة على ط .

الجزء الثالث : نفرض $a = 2$.

1) $f(2) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2$ و منه المتتالية (u_n) ثابتة على ط

تــمـــاريــــن

1 الحد الأول للمتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $u_n = \frac{1-n^2}{1+n^2}$ ، هو $u_0 = 1$ ومنه الحد الخامس هو $u_4 = \frac{-15}{17}$ وبالتالي الجواب خطئ .

2 صحيح المتتالية متزايدة .لأن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = (n+1)\times 2^{n+1} - n\times 2^n = 2^n(n+2)$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$.

3 صحيح لأن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = 2n+1$ ومنه : $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما إذن هي رتيبة .

4 صحيح لأنه إذا كان u_0 موجب تماما فإن كل حدود المتتالية الهندسية (u_n) تكون موجبة تماما وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n$ معناه أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 4$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

5 $u_{n+1} = u_n - 3$ معناه $u_{n+1} - u_n = -3$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن صحيح.

6 من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$ و $u_{n+1} = qu_n$ ومنه : $u_n + r = qu_n$ بوضع $u_n = x$ يصبح لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $x + r = qx$ معناه $q = 1$ و $r = 0$ إذن (u_n) متتالية ثابتة وأجب بصحيحة.

7 خطأ لأن إذا قبلت متتالية نهاية فإنها تكون وحيدة.

8 لدينا : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ، $AC = AB + r$ ، $BC = AB + 2r$ نضع $AB = a$

إذن : $(a+2r)^2 = a^2 + (a+r)^2$ ومنه :

$a^2 + 4ar + 4r^2 = a^2 + a^2 + 2ar + r^2$ إذن :

$3r^2 + 2ar - a^2 = 0$ ، $\Delta' = 4a^2$ ومنه : $r = -a$ أو $r = \frac{a}{3}$ نستبعد $r = -a$ لأنه في هذه الحالة $AC = 0$ وكذلك $BC = -a$ الطول سالب وبالتالي أجب بصحيح

9 خطأ لأن $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$ معناه

$u_0 q^n q^2 = u_0 q^n(4q-3)$ بما أن $u_0 \neq 0$ و $u_0 \neq 0$ فإن $q^2 = 4q - 3$ وبالتالي : $q^2 - 4q + 3 = 0$ ومنه :

$(q-1)(q-3) = 0$ أي : $q = 1$ أو $q = 3$

10 صحيح لأن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} - u_n = a$ و a عدد حقيقي ثابت إذن (u_n) هي متتالية حسابية أساسها a (يمكن $a = 0$) .

11 لدينا $u_0 = u_1$ و $u_1 = 0$ وبما أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = (1-n)u_n$ فإن $u_n = 0$ وبالتالي (u_n) متتالية معدومة وهي هندسية أساسها أي عدد حقيقي إذن صحيح .

12 خطأ لأنه لا يمكن الحكم على (v_n) أنها هندسية من الحدين v_1 و v_2 فقط .

13 $3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + 203 = 5160$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = 4n + 3$ إذن $u_0 = 3$ ، $u_{50} = 203$ ومنه : $\frac{51}{2}(u_0 + u_{50}) = 51\times 103 = 5253$ إذن الإجابة خاطأ

• $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 128 = 263$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 2^n$ إذن $v_0 = 1$ ، $v_7 = 2^7 = 128$ ومنه $v_0 \frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 255$ إذن الإجابة خاطأ .

14 لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ وبالتالي الإقتراحين الأول والثاني خاطئين .

لدينا : $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) = -\frac{3}{4}(2n+1)$

الفرق $u_{n+1} - u_n$ ليس ثابتا إذن (u_n) ليست حسابية .

$f'(x) = -\frac{3}{2}x$ من أجل كل x موجب، $f'(x) \leq 0$ إذن f متناقصة ومنه (u_n) متناقصة والإقتراح 4 صحيح

15 $u_1 = \frac{9}{5}$ ، $u_2 = \frac{57}{50}$ ، $u_3 = \frac{317}{375}$.

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{57}{90} \simeq 0,63$ ، $\frac{u_3}{u_2} = \frac{634}{855} \simeq 0,74$ ليست هندسية

$u_2 - u_1 = -0.66$ ، $u_3 - u_2 \simeq -0.3$ ليست حسابية

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ وبالتالي الاقتراحات الأول والثاني والرابع خاطئة . بينما الاقتراح الثالث صحيح لأن $u_{n+1} - u_n = -\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة .

16 لدينا $-2 \leq 1 \leq 2$ ومنه $-\frac{2}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}$ إذن $4 - \frac{2}{n} \leq 4 + \frac{1}{n} \leq 4 + \frac{2}{n}$ ، إذن يمكن أخذ $u_n = 4 + \frac{1}{n}$ الاقتراحان الأول والثاني خطئان .

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{2}{n} < 4$ ومنه :

$4-\frac{2}{n}>0$ إذن : $u_n>0$ والاقتراح الثالث صحيح .

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4-\frac{2}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty} 4+\frac{2}{n}=4$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=4$

ومنه (u_n) متقاربة إذن الاقتراح الرابع صحيح كذلك.

17 بوضع u_n السعر للبضاعة خلال n سنة ، $u_0=P$

لدينا $u_{n+1}=u_n+0.05u_n$ ومنه $u_{n+1}=1,05u_n$ نحصل على متتالية هندسية أساسها 1,05 ومنه: $u_n=P(1,05)^n$

بالآلة الحاسبة لدينا : $(1,05)^{10}\simeq 1.6$ ؛

$(1,05)^{15}\simeq 2.08$ ؛ $(1,05)^{14}\simeq 1.9799$

إذن $u_n\ge 2P$ إذا كان $n\ge 15$ إذن الاقتراح 2) صحيح .

18 $u_n=\frac{3^{n+2}}{4^{n-2}}$ معناه $u_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n\times 9\times 16$ أي : $u_n=144\left(\frac{3}{4}\right)^n$ إذن (u_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول $u_0=144$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ أي متقاربة ولكن متناقصة . إذن : الاقتراحان الأول و الثالث صحيحان والاقتراحان الثاني و الرابع خطئان.

19 الاقتراح الأول صحيح ، عبارة الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q .

$u_n=u_0+q^n$ معناه $u_n=u_0+\frac{u_n}{u_0}$ أي $u_n=\frac{{u_0}^2}{u_0-1}$

إذن الاقتراح الثاني يكون صحيح في حالة خاصة فقط وهي عندما يكون $u_0\neq 1$ و $q=1$

الاقتراحان الثالث والرابع صحيحان في حالة $q=1$ فقط .

20 °1 $u_n=3n-4$ ؛ f معلرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=3x-4$. $u_0=-4$ ، $u_1=-1$ ، $u_2=2$ ، $u_3=5$.

°2 $u_n=\frac{n-2}{n+2}$ ؛ f معلرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$. $u_0=-1$ ، $u_1=-\frac{1}{3}$ ، $u_2=0$ ، $u_3=\frac{1}{5}$.

°3 $u_n=n^2-\sqrt{n}$ ؛ f معلرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x^2-\sqrt{x}$. $u_0=0$ ، $u_1=0$ ، $u_2=4-\sqrt{2}$ ، $u_3=9-\sqrt{3}$.

°4 $u_n=\cos\left(3n-\frac{\pi}{4}\right)$ ؛ f معلرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

$u_0=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $u_1=\cos\left(\frac{12-\pi}{4}\right)$ ، $u_1\simeq -0,6$ ؛ $u_2=\cos\left(\frac{24-\pi}{4}\right)$ ، $u_2\simeq 0,48$ ، $u_3=\cos\left(\frac{36-\pi}{4}\right)$ ، $u_3\simeq -0,35$.

21 °1 $f:x\mapsto (x-1)^2$ معرفة على $[-2;+\infty[$ ؛ $u_1=9$ ، $u_2=64$ ، $u_3=3969$

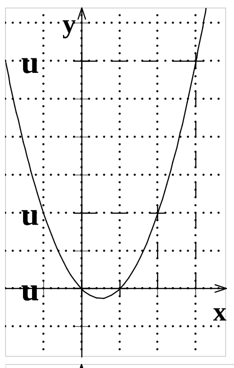
°2 $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$ معرفة على $[0;+\infty[$ ؛ $u_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$ ، $u_2=\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}$ ، $u_3=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}+1}$

°3 $f:x\mapsto\frac{2x}{x+1}$ معرفة على $[0;+\infty[$ ؛ $u_1=\frac{8}{5}$ ، $u_2=\frac{16}{13}$ ، $u_3=\frac{32}{29}$.

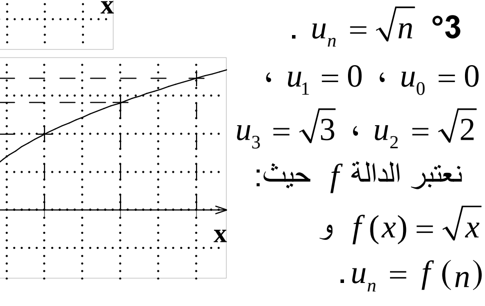
°4 $f:x\mapsto x^2-2x$ معرفة على $\mathbb{R}$ ؛ $u_1=15$ ، $u_2=195$ ، $u_3=37635$.

22 °1 $u_n=n+1$. $u_0=1$ ، $u_1=2$ ، $u_2=3$ ، $u_3=4$. نعتبر الدالة f حيث $f(x)=x+1$ و $u_n=f(n)$.

°2 $u_n=n^2-n$. $u_0=0$ ، $u_1=0$ ، $u_2=2$ ، $u_3=6$ نعتبر الدالة f حيث $f(x)=x^2-x$ و $u_n=f(n)$.

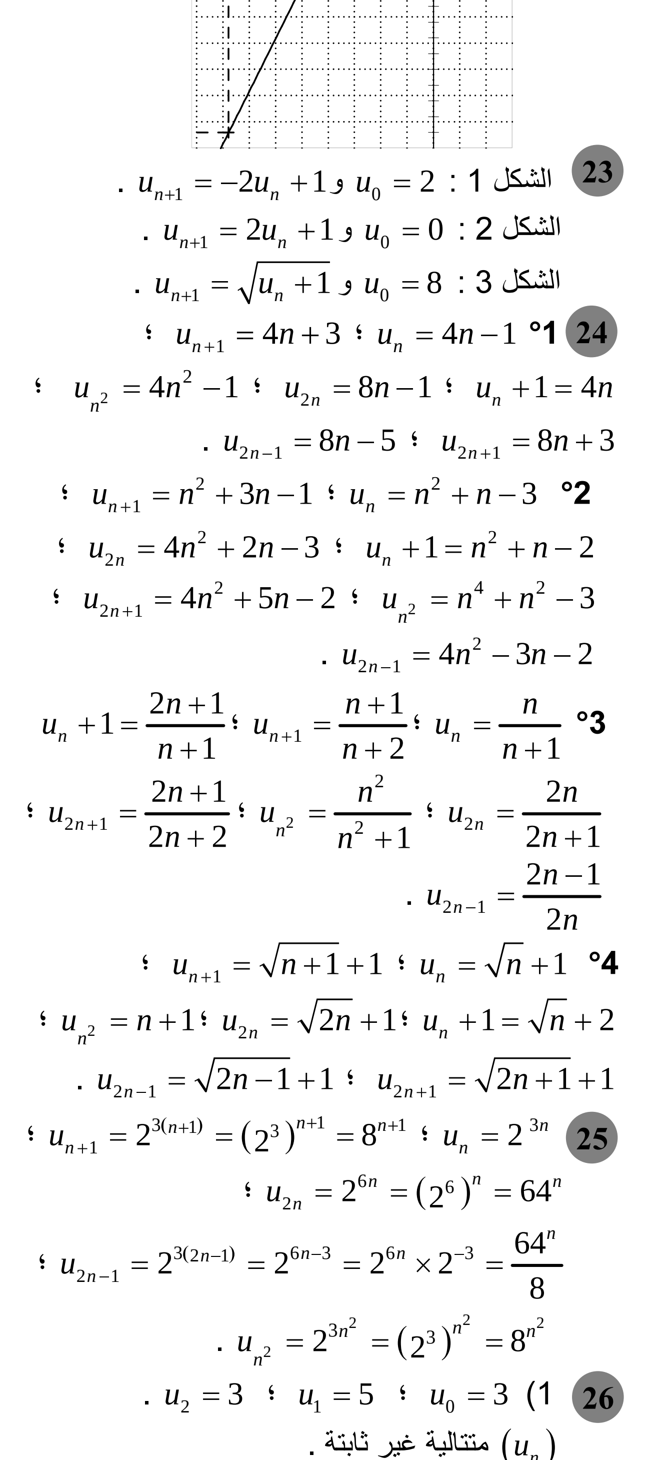


°3 $u_n=\sqrt{n}$. $u_0=0$ ، $u_1=0$ ، $u_2=\sqrt{2}$ ، $u_3=\sqrt{3}$ نعتبر الدالة f حيث: $f(x)=\sqrt{x}$ و $u_n=f(n)$.



°4 $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=2u_n-3\end{cases}$ $u_1=-1$ ، $u_2=-5$ ، $u_3=-13$

لتكن الدالة f حيث: $f(x)=2x-3$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.



23 الشكل 1 : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

الشكل 2 : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

الشكل 3 : $u_0 = 8$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

24 **1°** $u_n = 4n - 1$ ؛ $u_{n+1} = 4n + 3$ ؛

$u_n + 1 = 4n$ ؛ $u_{2n} = 8n - 1$ ؛ $u_{n^2} = 4n^2 - 1$ ؛

$u_{2n+1} = 8n + 3$ ؛ $u_{2n-1} = 8n - 5$.

2° $u_n = n^2 + n - 3$ ؛ $u_{n+1} = n^2 + 3n - 1$ ؛

$u_n + 1 = n^2 + n - 2$ ؛ $u_{2n} = 4n^2 + 2n - 3$ ؛

$u_{n^2} = n^4 + n^2 - 3$ ؛ $u_{2n+1} = 4n^2 + 5n - 2$ ؛

$u_{2n-1} = 4n^2 - 3n - 2$.

3° $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ ؛ $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$ ؛ $u_n + 1 = \dfrac{2n+1}{n+1}$

$u_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1}$ ؛ $u_{n^2} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ ؛ $u_{2n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}$ ؛

$u_{2n-1} = \dfrac{2n-1}{2n}$.

4° $u_n = \sqrt{n} + 1$ ؛ $u_{n+1} = \sqrt{n+1} + 1$ ؛

$u_n + 1 = \sqrt{n} + 2$ ؛ $u_{2n} = \sqrt{2n} + 1$ ؛ $u_{n^2} = n + 1$ ؛

$u_{2n+1} = \sqrt{2n+1} + 1$ ؛ $u_{2n-1} = \sqrt{2n-1} + 1$.

25 $u_n = 2^{3n}$ ؛ $u_{n+1} = 2^{3(n+1)} = \left(2^3\right)^{n+1} = 8^{n+1}$ ؛

$u_{2n} = 2^{6n} = \left(2^6\right)^n = 64^n$ ؛

$u_{2n-1} = 2^{3(2n-1)} = 2^{6n-3} = 2^{6n} \times 2^{-3} = \dfrac{64^n}{8}$ ؛

$u_{n^2} = 2^{3n^2} = \left(2^3\right)^{n^2} = 8^{n^2}$.

26 1) $u_0 = 3$ ؛ $u_1 = 5$ ؛ $u_2 = 3$.

(u_n) متتالية غير ثابتة .

2) $u_n - 3 = n\left(n^2 - 5n + 6\right) = n(n-2)(n-3)$

إلى جداء عوامل . $u_n = n^3 - 5n^2 + 6n + 3$

3) $u_n = 3$ معناه $u_n - 3 = 0$ ومعناه :

$n(n-2)(n-3) = 0$ أي: $n = 0$ أو $n = 2$ أو $n = 3$

27 1) $u_0 = -5$ ، $u_1 = -2$ ، $u_2 = 5$ ، $u_3 = 10$.

2) $u_0 = -1$ ، $u_1 = 6$ ، $u_2 = 10,5$ ، $u_3 = 12$.

3) $u_0 = 6$ ، $u_1 = 10,5$ ، $u_2 = 12$ ، $u_3 = 12,5$.

28 1) $u_1 = 4$ ، $u_2 = 5$ ، $u_3 = 6$

2) من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + 1$.

29 1) $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{5}{x} = \dfrac{x^2 + 25}{5x}$

2) $f'(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{5}{x^2} = \dfrac{x^2 - 25}{5x^2}$ ومنه f متناقصة

تماما على $]0;5]$ ومتزايدة تماما على $[5;+\infty[$.

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4) (u_n) ليست رتيبة .

5) (u_n) تقبل قيمة حدية صغرى u_5 حيث $u_5 = 2$

30 1) $u_1 = 1,5$ ؛

$u_2 \simeq 1,66$ ، $u_3 = 1,6$.

2) $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

3) $u_4 = 1,625$ ؛

$u_5 \simeq 1,615$ ،

$u_6 \simeq 1,619$

31 1) $u_1 = 1$ لأنه يوجد مثلث واحد AB_0B_1 ؛ $u_2 = 3$

لأنه توجد 3 مثلثات هي AB_0B_1 ، AB_0B_2 و AB_1B_2 .

2) $u_{n+1} - u_n = n + 1$.

3) $u_3 = 6$ ؛ $u_4 = 10$ ؛ $u_5 = 15$.

4) $v_1 = 1$ ؛ $v_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{2(n+1)}{2}$

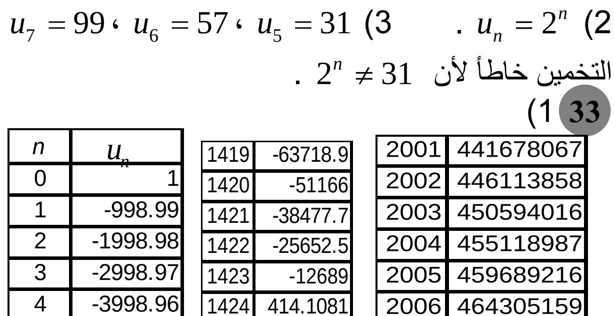
$v_{n+1} = v_n + n + 1$ ومنه : $v_n = u_n$

32 1) $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ ، $u_2 = 4$ ، $u_3 = 8$ ، $u_4 = 16$

2) $u_n = 2^n$.   3) $u_5 = 31$ ، $u_6 = 57$ ، $u_7 = 99$

التخمين خاطأ لأن $2^n \neq 31$.

33 1)



n	u_n
0	1
1	-998.99
2	-1998.98
3	-2998.97
4	-3998.96
5	-4998.95

1419	-63718.9
1420	-51166
1421	-38477.7
1422	-25652.5
1423	-12689
1424	414.1081
1425	13658.25

2001	441678067
2002	446113858
2003	450594016
2004	455118987
2005	459689216
2006	464305159
2007	468967270

2)

$u_{n+1}-u_n = 1,01^{n+1}-1000(n+1)-1,01^n+1000n$

$u_{n+1}-u_n = 0,01\left(1,01^n-\dfrac{1000}{0,01}\right)$

لدينا $u_{1158}-u_{1157}\simeq -0,39$ و $u_{1159}-u_{1158}\simeq 9,6$

ومنه $n_0 = 1158$ ونلاحظه كذلك من المجدول .

34 $u_n = -2n+3$. المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

35 $u_n = \dfrac{2-4n}{n+2}$.الدالة $f : x \mapsto \dfrac{2-4x}{x+2}$ متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

36 $u_n = (n-5)^2$. المتتالية (u_n) غير رتيبة تكون متناقصة تماما من أجل $0 \le n \le 5$ ومتزايدة تماما من أجل $n \ge 5$.

37 $u_n = \dfrac{3^{2n}}{2^{3n}}$. كل الحدود موجبة تماما و $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{9}{8}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ومنه إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

38 $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$. الدالة $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2x}$ متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

39 $u_{n+1}-u_n = 2n$ و $n \in \mathbb{N}$ إذن (u_n) متزايدة تماما.

40 $u_n = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{2n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$. $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ونجد (u_n) متناقصة تماما.

41 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3}$ ومنه $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ وكل الحدود سالبة إذن $u_{n+1} > u_n$ ومنه (u_n) متزايدة تماما.

42 (u_n) ليست رتيبة .

43 1) $v_6 = -41$ ؛ $v_{n+1}-v_n = 2n-11$.

من أجل $n \ge 6$ ؛ $2n-11 > 0$ إذن (v_n) متزايدة تماما.

44 1) f متزايدة تماما على $]-\infty;0[$ و $[10;+\infty[$ ، ومتناقصة تماما على $[0;10]$.

2) ابتداء من الدليل 10 ، (u_n) متزايدة تماما.

45 1) $0,5$ ؛ 1 ؛ $2,25$ ؛ $5,4$ ؛ $13,5$.

2) $3^n > 0$ و $n+2 > 0$ إذن $u_n > 0$.

3) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{2n+3}{n+3}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$

4) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ وكا الحدود موجبة إذن (u_n) متزايدة تماما .

46 1) الدالة f ليست رتيبة .

2) $u_n = n+1$.

3) $u_{n+1}-u_n = 1$ ومنه (u_n) متزايدة تماما .

47 1) $u_1 = 0,5$ ، $u_2 \simeq 0,166$ ، $u_3 = 0,083$ ، $u_4 = 0,05$.

2) $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

3) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ ومنه $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+2}$ ومنه $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

بما أن $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$ فإن $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} > 0$ ومنه كل الحدود موجبة وبالتالي (u_n) متناقصة تماما.

48 1) من المنحني البياني يلاحظ أن الدالة f ليست رتيبة

2) $u_n = \dfrac{2\sin(2\pi n)}{2n+1} = 0$.

3) (u_n) متتالية معدومة إذن هي ثابتة .

49 1)

TEXAS INSTRUMENTS

n	u(n)
0	-.6667
1	-.25
2	0
3	.16667
4	.28571
5	.375
6	.44444

n=0

TEXAS INSTRUMENTS

n	u(n)
10	.61538
11	.64286
12	.66667
13	.6875
14	.70588
15	.72222
16	.73684

n=10

الحاسبة TI83+ نجد : $u_0 = -0,67$ ، $u_1 = -0,25$ ، $u_5 = 0,38$ ، $u_{10} = 0,62$ ، $u_{15} = 0,74$

2) $u_{2n} = 1-\dfrac{5}{2n+3}$ ، $u_{4n+1} = 1-\dfrac{5}{4n+4}$ ، $u_{10^3 n} = 1-\dfrac{5}{10^3 n+3}$.

50

TEXAS INSTRUMENTS

n	u(n)
1	0
2	1.5
3	2.6667
4	3.75
5	4.8
6	5.8333
7	6.8571

n=7

n	u(n)
10	9.9

n	u(n)
20	19.95

n	u(n)
50	49.98

n	u(n)
200	200
201	201

$u_1 = 0$ ، [illegible] ، $u_3 \simeq 2,67$ ، $u_4 = 3,75$ ، $u_{10} = 9,9$ ، $u_{20} = 19,95$ ، $u_{50} = 49,98$ ، $u_{200} = 200$.

n	v(n)
0	2
1	1.5
2	.83333
3	-.3667

n	v(n)
10	-.459
11	1.7196

n	v(n)
20	-1.352
21	-.6124

$v_1 = 1,5$ ، $v_2 = 0,83$ ، $v_3 \simeq -0,37$ ، $v_{10} \simeq -0,46$ ، $v_{20} \simeq -1,35$.

51 **°1** $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 3x^2 = -\infty$.

°2 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - 3 = -3$.

°3 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \left(1-\sqrt{x}\right)\left(2+\frac{3}{x}\right) = -\infty$.

°4 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$.

°5 $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $-1 \le (-1)^n \le 1$ ؛ ومنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{-1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$ إذن $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

°6 $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^2} = 0$.

ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $-1 \le \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \le 1$ ؛ ومنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $-\frac{1}{3n^2} \le \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{3n^2} \le \frac{1}{3n^2}$

إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

°7 $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ، لأن $0 < 0,7 < 1$.

°8 $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ، لأن $0 < \frac{\sqrt{5}}{4} < 1$.

°9 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ، لأن $0 < \frac{1}{3} < 1$.

°10 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{3x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$.

52 (1 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

(2 $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

53 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 .

54 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -3$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 3− .

55 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 4n+5$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

56 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 2n+1$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

57 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+3} - u_{n+2} = -\frac{4}{5}$ إذن : (u_n) متتالية حسابية أساسها $-\frac{4}{5}$ وحدها الأول $u_2 = \frac{3}{5}$.

58 من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+1}$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

59 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 2$ إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 .

60 من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -5u_n$ العبارة غير ثابتة إذن (u_n) متتالية ليست حسابية .

61 $q = u_1 - u_0 = 7$ ؛ $u_{100} = u_0 + 100q = 698$.

62 $u_{15} = u_0 + 15q$ ومنه $q = \frac{u_{15} - u_0}{15} = 4$ ؛ $u_{2007} = u_0 + 2007q = 8027$.

63 $u_{200} = u_0 + 200q$ ؛ $q = \frac{u_{200} - u_0}{200} = 2,5 = \frac{5}{2}$ ؛ $u_{100} = u_0 + 100q = 253$

64 $u_{24} = u_7 + (24-7)q$ ؛ $q = \frac{u_{24} - u_7}{17} = 2$ ؛ $u_0 = u_7 + (0-7)q = -15$.

65 $u_0 = u_{17} + (0-17)q = 1$.

66 **°1** $u_n = 4n - 1$. **°2** $u_n = -5n + \frac{3}{2}$.

°3 $u_n = \frac{5}{4}n + \sqrt{3}$. **°4** $u_n = 10^{-2}n + \frac{45}{2}$.

67 الشكل 1 يمثل متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = -\frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{3}{2}$. الشكل 2 يمثل متتالية ليست حسابية .

الشكل 3 يمثل متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 3$ وأساسها 1− . الشكل 4 يمثل كذلك متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -1$ وأساسها 2 .

68 1° $u_n = u_{15} + (n-15)q$ ونجد $n = 53$.

2° $q = \frac{u_{10} - u_5}{10-5} = -10$ ؛ $n = \frac{u_n - u_5}{q} + 5 = 15$.

3° $q = \frac{u_{31} - u_{19}}{31-19} = \frac{9}{2}$ ؛ $u_6 = 69 - 9q = \frac{57}{2}$ ؛ $n = \frac{u_n - u_6}{q} + 6 = 13$.

69 $q = 5$ ؛ $u_{29} = 111$ ؛ $S = \frac{20}{2}\left(u_{10} + u_{29}\right) = 1270$

70 (1 $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}$ ؛ $v_0 = -\frac{1}{3}$.

2) $v_n = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{3}$ 3) $u_n = \frac{6n-2}{3n+2}$.

71 1) التمثيل

2) $v_{n+1} - v_n = 2$ ؛ $v_0 = 0$.

3) $v_n = 2n$ ؛ $u_n = \frac{1}{2n-1}$.

4) $\lim_{n\to 0} u_n = 0$

72 1) $u_2 = 7$ ؛ $u_3 = 10$ ؛ $u_4 = 13$ ؛ $u_5 = 16$.

2) $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = u_1 - u_0 = 3$ ؛ $q = 3$.

3) $u_n = 3n+1$. 4) $u_n = 361$ معناه $n = 120$.

5) $S = 6n^2 - n$.

73 1) $S = \frac{63}{2}(5+67) = 2268$.

2) $u_n = 2n+1$ ؛ $S = \frac{51}{2}(1+101) = 2601$.

3) $S = (17+7-3-13-23-33-43-53)$
$+(12+2-8-18-28-38-48)$

$$S = 4(17-53) + \frac{7}{2}(12-48) = -270$$

74 °1 (u_n) هندسية و $r = 3$.

°2 (u_n) ليست هندسية . °3 (u_n) هندسية و $r = \frac{4}{3}$.

°4 (u_n) هندسية و $r = 9$. °5 (u_n) هندسية و $r = 4$.

°6 $u_{n+1} = 5u_n + 2n - \frac{1}{2}$ ؛ (u_n) ليست هندسية .

°7 (u_n) ليست هندسية . °8 (u_n) هندسية و $r = \sqrt{2}$.

°9 $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$ ؛ (u_n) ليست هندسية .

°10 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}u_n$ ؛ (u_n) ليست هندسية .

75 الشكل 1 يمثل متتالية هندية أساسها $-\frac{1}{2}$.

الشكل 2 يمثل متتالية ليست هندسية .

الشكل 3 يمثل متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

76 $u_n = 3\times 2^n$.

77 $u_n = \frac{5}{2}\times(-3)^n$.

78 $u_3 = 4$ ؛ $u_5 = 16$.

79 $u_0 = -320$ ؛ $u_2 = -80$.

80 $q^3 = \frac{1}{8}$ ومنه $q = \frac{1}{2}$ ؛ $u_{100} = \frac{11}{2^{92}}$.

81 °1 (u_n) متناقصة تماما .

°2 (u_n) متناقصة تماما . °3 (u_n) متناقصة تماما .

°4 (u_n) ليست رتيبة . °5 (u_n) متناقصة تماما .

°5 (u_n) ليست رتيبة .

82 °1 $u_n = -\frac{7^n}{4}$ ؛ °2 $u_n = 3^{n+1}$ ؛ °3 $u_n = \frac{\sqrt{2}}{(-2)^n}$

83 لدينا: $a+ar+ar^2 = 21$ ، $2a+ar-ar^2 = 27$

و $3a+2ar = 48$ ونجد $a = \frac{48}{3+2r}$ ؛ ومنه

$16+16r+16r^2 = 21+14r$ أي :

$16r^2+2r-5 = 0$ ؛ $\Delta' = 81$ ؛ $r' = \frac{-5}{8}$ ؛ $r'' = \frac{1}{2}$

$r = \frac{-5}{8}$ ، $a = \frac{192}{7}$ ، $b = -\frac{120}{7}$ ، $c = \frac{75}{7}$.

$r = \frac{1}{2}$ ، $a = 12$ ، $b = 6$ ، $c = 3$.

84 1) لدينا $a+c = 2b$ ، $ab = c^2$ و $a+b+c = 18$

ومنه $b = 6$ ويصبح لدينا $a+c = 12$ و $a = \frac{c^2}{6}$ ونحل

المعادلة $c^2+6c-72 = 0$ ، $c' = -12$ ، $c'' = 6$

الحالة الأولى $(a;b;c) = (24;6;-12)$

الحالة الثانية $(a;b;c) = (6;6;6)$

2) الحالة الأولى الأساس -2 والحالة الثانية الأساس 1 .

85 1) $0 < r < 1$

2) $u_2 = -\frac{1}{2}$ ثم نحل المعادلة $12x^2+13x+3 = 0$ ،

$\Delta = 25$ ، $x' = -\frac{3}{4}$ ، $x'' = -\frac{1}{3}$ وبما أن المتتالية

متزايدة فإن $u_1 = -\frac{3}{4}$ ، $u_2 = -\frac{1}{2}$ ، $u_3 = -\frac{1}{3}$.

3) $u_n = -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. 4) $S = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \frac{9}{4}$

86 $1+y+y^2+y^3 = \frac{y^4-1}{y-1} = (y+1)(y^2+1)$

$1+y+y^2+y^3 = 0$ معناه $y = -1$ ونجد $x = 0$.

87 1) $u_1 = 0$ ، $u_2 = \frac{2}{3}$ ، $u_3 = \frac{10}{11}$.

2) $\frac{2}{3} - 0 \neq \frac{10}{11} - \frac{2}{3}$ و $\frac{2}{3} \neq 0\times q$.

3) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=...=\frac{1}{4}v_n$. 4) $v_n=\frac{-2}{4^n}$.

5) $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$ ، $u_n=\frac{-2v_n-1}{v_n-1}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

88 1) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=...=\frac{3}{4}v_n$ ، $v_1=\frac{3}{4}$ ، $r=\frac{3}{4}$

2) $v_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$. 3) $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ومنه (v_n) متناقصة تماما .

4) $u_{n+1}-u_n=n\left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{-n+3}{4n}$ ومنه ابتداء من الرتبة $n_0=3$ تكون (u_n) متناقصة تماما .

89 1) $\alpha=-4$.

2) $v_{n+1}=u_{n+1}+4=...=\frac{1}{2}v_n$ ؛ $v_n=9\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛

$u_n=9\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$.

3) $S_1=-18\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+18$ ؛ $S_2=S_1-4(n+1)$.

90 1) $u_1=\pi$ ، $u_2=\frac{\pi}{2}$ ، $u_3=\frac{\pi}{4}$ ، $u_n=\frac{\pi}{2^{n-1}}$.

2) الطول يساوي $2\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

91 نضع a_n العدد الأول الموجود في السطر n و b_n العدد الموجود في آخره . لدينا : $b_n=n^2$ ، $a_{n+1}=b_n+1$

و $a_{n+1}=a_n+2n-1$ ومنه نستنتج $a_n=n^2-2n+2$

لدينا $a_n\le 2007\le b_n$.

$n^2-2n+2\le 2007$ تكافئ $-43\le n\le 45$

و $n^2\ge 2007$ تكافئ $n\ge 45$ أو $n\le -44$

(مع اعتبار n عدد طبيعي) إذن $n=45$ و $a_{45}=1937$

رقم العمود هو $2007-1937+1=71$

ولكن حسب المثال لدينا العدد1 موجود في السطر 0

ومنه العدد 2007 موجود في السطر 44 والعمود 71

92 عدد الصفحات 63 و رقم الصفحة الملتصقة مع موالية لها هو 4 .

93 1) $u_1=0$ ، $u_2=-0,5$ ، $u_3=-0,75$.

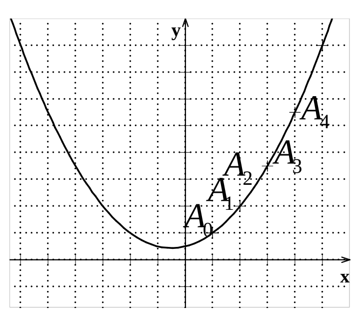
2) $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+\frac{\alpha-1}{2}$ ؛ $\alpha=1$. $v_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$u_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$. 3) (u_n) متناقصة تماما .

4) $v_n<10^{-4}$ ، $v_{14}\simeq 0,000122$ ، $v_{15}\simeq 0,000061$ ومنه $n=15$.

5) $S_n=5-n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 6) $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=-1$.

94 $u_1=100$ ، $u_2=120$ ، عدد المرضى لليوم الرابع $u_4=100+4\times 20=180$ ؛ $u_7=240$ وعدد كل المرضى بعد 7 أيام هو $1190=\frac{7\times 340}{2}$ وبعد 15 اليوم 3600 .



95 1) التمثيل .

2) بالحساب نجد العبارة

3) $n=x_n-1$

$y_n=\frac{x_n^2+x_n+2}{4}$

4) إنشاء (P) .

96 تصحيح : تستقبل في كل سنة 20 تلميذ جديد في السنة الأولى **أكثر من السنة الماضية** .

متتالية حسابية أساسها 20 وحدها الأول $u_0=1500$ ونجد بعد 25 سنة يكون عدد التلاميذ 2000 .

97 لدينا متتالية حسابية حدها الأول $u_0=5,3$ وأساسها $r=0,0175$ ونجد في سنة 2000 عدد السكان $u_{10}=5,475$ وفي سنة 2007 : $u_{17}=5,5975$ وفي سنة 2030 : $u_{40}=6$ مقدرا بالمليار نسمة .

98 باعتبار متتالية حسابية حدها الأول $u_1=1$ وأساسها $r=2$ نجد ثمن الحصان هو $u_{24}=47$ مقدرا بالدينار .

99 1) $u_1=1$ ؛ $u_2=2$ ؛ ... $u_{10}=10$.

2) $u_n=n$. 3) ابتداء من $n=31$.

100 1) $l_n=A\Omega_n=10\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ؛ $R_n=5\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2) $A\Omega_n-R_n=A\Omega_{n+1}+R_{n+1}=5\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3) $u_n=\pi R_n^2$ أساسها $\frac{1}{9}$.

4) $S_n=\frac{225\pi}{8}\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right]$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{225\pi}{8}$

101 1) $\alpha=a\alpha+b$ ومنه $\alpha=\frac{b}{1-a}$.

2) $v_{n+1}=u_{n+1}-\alpha=av_n$ الأساس هو a .

3) $v_n = (u_0 - \alpha)a^n$ ؛ $u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$ ؛

$u_n = \left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)a^n + \dfrac{b}{1-a}$.

4) $h_n = u_n - u_{n-1}$ ؛ $h_n = \left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)\left(1 - \dfrac{1}{a}\right)a^n$

(h_n) هندسية أساسها a .

$h_1 + h_2 + ... + h_n = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 +$
$+ ... + u_n - u_{n-1}$

بحذف الحدود المتعاكسة نجد $h_1 + h_2 + ... + h_n = u_n - u_0$

102 1) المثلثات متشابهة نبرهن أن الإرتفاعات h_n
والأضلاع a_n تحقق : $h_{n+1} = 2h_n$ و $a_{n+1} = 2a_n$ ومنه
$S_{n+1} = 4S_n$ إذن المساحات (S_n) هندسية أساسها 4.

2) $\dfrac{h_n}{3}$ هو نصف قطر الدائرة المرسومة في المثلث ذي

الارتفاع h_n والمساحة للقرص المرفق هي $S'_n = \dfrac{\pi}{9}h_n^2$

إذن (S'_n) هندسية أساسها 4.

103 تصحيح رقم التمرين غير موجود وبالنسبة للسؤال1)
بين أن المتتالية (t_n) لمساحات المثلثات هي هندسية ...

1) المثلثات المتقايسة الأضلاع (اللون الأزرق) متشابهة ،
نضع a_n طول ضلعها و b_n طول ارتفاعها ونبين أن :

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 2$ والمساحة $t_n = \dfrac{1}{2}a_n b_n$ إذن المتتالية

(t_n) هندسية أساسها 4 .

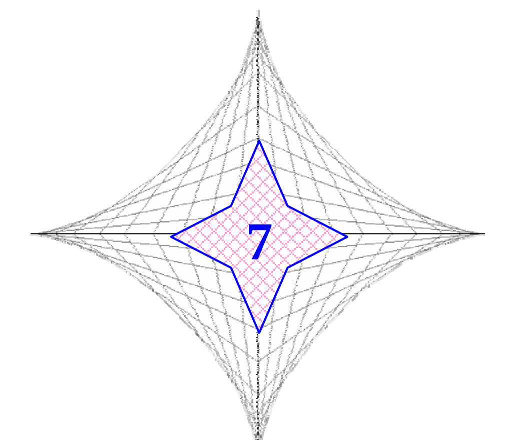
2) $h_n = t_n + 3k_n$ حيث k_n مساحة المثلث المتساوي

الساقين (اللون الأصفر) ذي القاعدة a_n والارتفاع $\dfrac{1}{3}b_n$.

ونجد $h_n = a_n b_n$ ومنه (h_n) هندسية أساسها 4 .

المتتالية $\dfrac{1}{2}a_0b_0$ ، a_0b_0 ، $\dfrac{1}{2}a_1b_1$ ، a_1b_1 . . . هي

هندسية أساسها 2 .



المرجح في المستوي



الكفاءات المستهدفة

- إنشاء مرجح نقطتين.
- إنشاء مرجح ثلاث نقط.
- حساب إحداثيات المرجح.
- استعمال المرجح لإثبات استقامية نقط أو تلاقي مستقيمات.

- **أهم ما ينبغي التحكم فيه في هذا الفصل خاصية التجميع**
- **يعتبر المرجح أداة فعالة في حل مشكلات متنوعة (كتعيين مجموعة نقط و إثبات تلاقي مستقيمات في نقطة واحدة)**
- **علىالمتعلم ترجمة العلاقة الشعاعية التي يحققها المرجح و العكس**
- **يلاحظ المتعلم العلاقة بين المرجح و معدل سلسلة إحصائية و مركز العطالة في التطبيقات الفيزيائية**

الأنشطة

النشاط 1 :

الهدف : إدراج مفهوم مرجح نقطتين

1) تصحيح : أحسب قيمة m_B بدلالة GA و GB

عوض $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{GB}$ و الجواب $m_B = 6\dfrac{GA}{GB}$

2) * $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{3}{7}\overrightarrow{GB}$ * نضع :

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}$ * AG = 6 Cm

3) * نأخذ $m_B = 2m_A$ * نأخذ $m_B = 5m_A$

النشاط 2 :

الهدف : إنشاء مرجح ثلاث نقط

1) $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BC}$

2) في العلاقة $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC}$ نضع
$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}$ مع G , I , C على استقامة واحدة

3) في العلاقة نفسها نضع $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JB}$ و
$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JC}$ مع G , J , A على استقامة واحدة

4) G نقطة تقاطع (AJ) و (GI) 6) في العلاقة السابقة نضع $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA}$

النشاط 3 :

الهدف : تعيين مرجح نقطتين

1) $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GB}$ أي $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (2

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ 3) G منتصف [AB] 4) m = 4 Kg

النشاط 4 :

الهدف : استعمال خاصية التجميع لتعيين مرجح جملة .

1) $m \simeq 10,77$ 2) $m_1 \simeq 11,07$ ، $m_2 \simeq 9,76$ $m_3 \simeq 13,83$

3) تصحيح مقام الكسر 29 و ليس 28 .

$$\frac{13m_1 + 13m_2 + 3m_3}{29} \simeq 10,77$$

الأعمال الموجهة

أعمال موجهة 1 :

الهدف : تعيين مجموعة نقط باستعمال المرجح

1) C دائرة مركزها G مرجح الجملة { (3)C، (2-)B، (1)A} و نصف قطرها 3

2) C دائرة مركزها G مرجح الجملة { (3-)C، (1)B، (2-)A} و نصف قطرها $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ و هي تشمل النقطتين A و C

3) C دائرة مركزها G مرجح الجملة { (2)C، (1-)B، (1)A} و نصف قطرها $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و هي تشمل A

4) مجموعة النقط هي محور القطعة [GP] حيث G مرجح الجملة { (2)C، (1)B، (1)A}
و P مرجح الجملة { (1)C، (1)A}

5) * B تحقق المساواة * مجموع المعاملات معدوم
* $\left\| \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \right\| = \sqrt{3}\alpha$

* (Γ) دائرة مركزها G و نصف قطرها $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha$

* للإنشاء (Γ) تشمل B

أعمال موجهة 2 :

الهدف : استعمال المرجح لإثبات تلاقي مستقيمات

1) للإنشاء : * $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ * $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$

يبدو أن المستقيمات (CI) ، (BJ) و (AK) تتقاطع في نقطة واحدة

2) I مرجح الجملة { (3-)B، (1)A} ، J مرجح الجملة { (3-)C، (2)A} ، K مرجح الجملة { (1)C، (2)B}

3) نعتبر G مرجح الجملة { (3-)C، (6-)B، (2)A} ، G موجود لأن مجموع المعاملات غير معدوم

باستعمال خاصية الجمع : G مرجح الجملة { (3-)C، (4-)I} و منه G ∈ (IC)

G مرجح الجملة { (6-)B، (1-)J} و منه G ∈ (BJ)

G مرجح الجملة { (2)A، (9-)K} و منه G ∈ (AK)

أعمال موجهة 3 :

الهدف : التعرف على مستقيم أولار

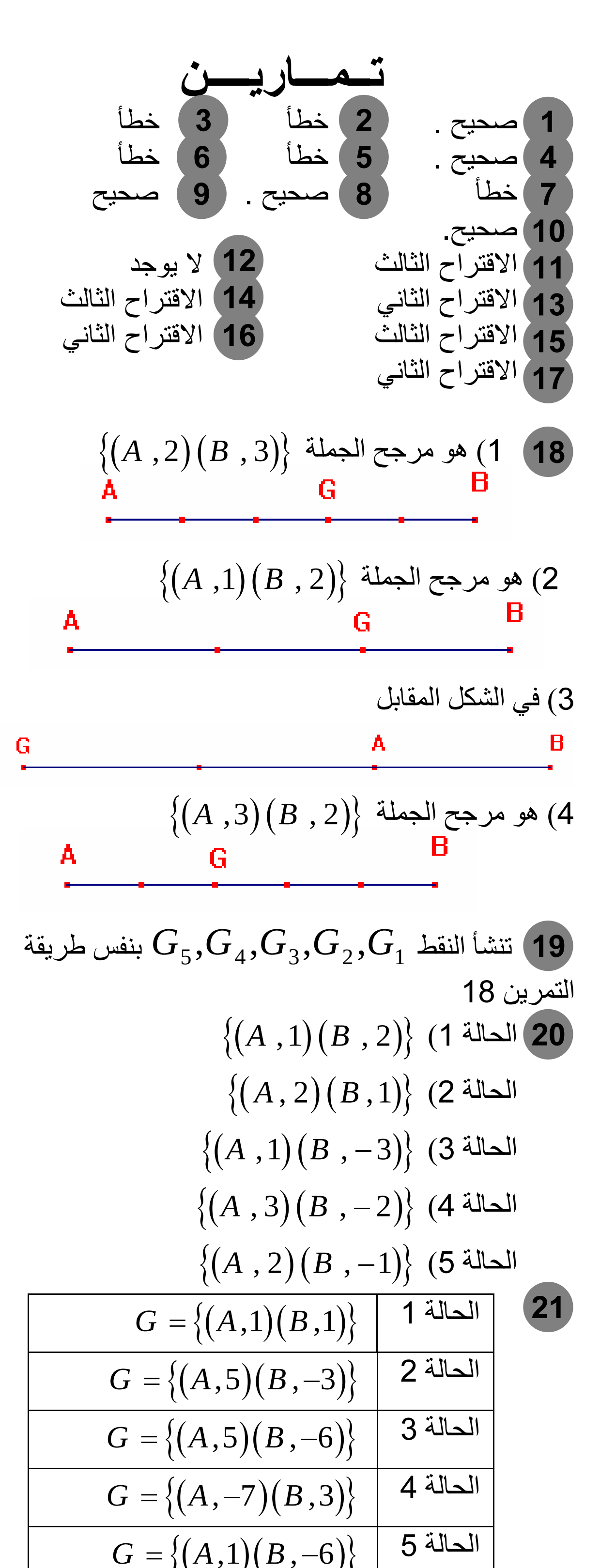
2) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$ و بالتالي (AH) عمودي على (BC)
لأن (OA') عمودي على (BC)

3) H ملتقى الإرتفاعات في المثلث ABC

4) تصحيح : O مرجح النقطتين H و G مرفقتين بالمعاملين (1-) و (3) على الترتيب ، $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

5) O ، G ، H على استقامة واحدة ، $G \in [OH]$

تمـــاريـــن



1 صحيح . **2** خطأ **3** خطأ

4 صحيح . **5** خطأ **6** خطأ

7 خطأ **8** صحيح . **9** صحيح

10 صحيح.

11 الاقتراح الثالث **12** لا يوجد

13 الاقتراح الثاني **14** الاقتراح الثالث

15 الاقتراح الثالث **16** الاقتراح الثاني

17 الاقتراح الثاني

18 1) هو مرجح الجملة $\{(A,2)(B,3)\}$

2) هو مرجح الجملة $\{(A,1)(B,2)\}$

3) في الشكل المقابل

4) هو مرجح الجملة $\{(A,3)(B,2)\}$

19 تنشأ النقط G_1,G_2,G_3,G_4,G_5 بنفس طريقة التمرين 18

20 الحالة 1) $\{(A,1)(B,2)\}$

الحالة 2) $\{(A,2)(B,1)\}$

الحالة 3) $\{(A,1)(B,-3)\}$

الحالة 4) $\{(A,3)(B,-2)\}$

الحالة 5) $\{(A,2)(B,-1)\}$

21

الحالة 1	$G=\{(A,1)(B,1)\}$
الحالة 2	$G=\{(A,5)(B,-3)\}$
الحالة 3	$G=\{(A,5)(B,-6)\}$
الحالة 4	$G=\{(A,-7)(B,3)\}$
الحالة 5	$G=\{(A,1)(B,-6)\}$
الحالة 6	G ليست مرجحا لجملة متقلة

22

الحالة 1)	$(\alpha,\beta)=(2,1)$
الحالة 2)	$(\alpha,\beta)=(5,-7)$
الحالة 3)	$(\alpha,\beta)=(3,-2)$
الحالة 4)	$(\alpha,\beta)=(2,-1)$

23 $A=\{(C,1)(B,-3)\}$ ، $B=\{(A,2)(C,1)\}$

24 $A=\{(C,1)(B,-4)\}$ ، $C=\{(A,3)(B,-4)\}$

25 $B=\{(A,1)(C,1)\}$ ، $C=\{(A,-1)(B,2)\}$

26 نستخدم المساواة الشعاعية $\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ وعلاقة شال ($\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$)

27 G_1 هو نظير A بالنسبة إلى B وَ G_2 هو نظير C بالنسبة إلى B

28 1)ننشئ باستخدام المساواتين الشعاعيتين

$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{GG'}=-\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$

29 1) نستخدم للإنشاء العلاقات الشعاعية :

$\overrightarrow{B'C}=2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'A}=3\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{C'C}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

2) لاحظ أن :

$$\begin{cases}(2-3)\overrightarrow{MA'}=2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\\(-2+1)\overrightarrow{MB'}=-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\\(3-1)\overrightarrow{MC'}=3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\end{cases}$$

3) من المساواة في 2) نجد : $\overrightarrow{A'B'}=2\overrightarrow{A'C'}$

30 2)

$\overrightarrow{AG_1}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG_2}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3) لاحظ أن : $\overrightarrow{AG_1}=2\overrightarrow{BG_2}$

31 1) $N=\{(C,1)(B,-4)\}$ أي $\overrightarrow{NC}-4\overrightarrow{NB}=\vec{0}$ و باستخدام علاقة شال نجد :

$\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{BN}=\vec{0}$

2) استعمل مبرهنة طاليس و نستعمل نفس المبرهنة لإثبات أن $LMJI$ متوازي أضلاع

لإثبات أن $O=\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$ نلاحظ أن :

$O=\{(L,3)(J,3)\}=\{(A,2)(C,1)(B,2)(C,1)\}$

$O=\{(A,2)(B,2)(C,2)\}=\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$

32 1) $L=\{(A,-2)(C,3)\}$

2) $K=\{(B,1)(C,4)\}$

33 1) $M=\{(B,5)(C,6)\}$ ، $N=\{(A,2)(B,5)\}$ ، $P=\{(A,1)(C,3)\}$

2)لتكن G نقطة تقاطع (NC) و (BP) نبرهن أن $G \in (AM)$

يمكن أن نعبر عن كون G مرجح النقطتين A و M

نبرهن وجود α حيث :

$$G = \{(A,\alpha)(B,5)(C,6)\} = \{(A,\alpha)(M,11)\}$$

وبالتالي $G \in (AM)$

نفرض أن $G = \{(A,\alpha)(B,5)(C,6)\}$ و نسمي $P' = \{(A,\alpha)(C,6)\}$

G هو أيضا مرجح الجملة : $\{(B,5)(P',\alpha+6)\}$ إذن $P \in (AC)\cap(BG)$ إذن $P = P'$

و بما أن $P = \{(A,1)(C,3)\}$ فإن : $\alpha = 2$

34 2) لاحظ أن : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ وبالتالي :

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{AI} = (-\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

وأن : $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$ و بالتالي

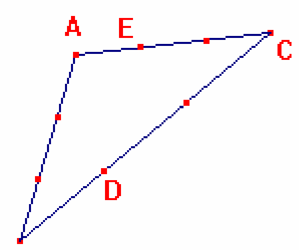
$$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) + 3\overrightarrow{AD} = (-\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}) + 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$$

3) لاحظ أن : $\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{CI}$

4) أ) لدينا D منتصف $[AK]$ و $(AL)//(DC)$ إذن C منتصف $[KL]$ (لاحظ أن $C \in [KL]$) ب)يمكن أن نبرهن أن $\overrightarrow{KL} = 2\overrightarrow{DB}$ باستعمال خواص متوازي أضلاع

35 1) نستعمل العلاقة : $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

2) نستعمل العلاقة : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$



3) F هو صورة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BD}$

4) باستعمال علاقة شال و الأسئلة السابقة نبرهن أن : $\overrightarrow{DF} = \frac{5}{3}\overrightarrow{DE}$

36 1) تكون G موجودة إذا و فقط إذا كان : $(m^2+2)+(m^2+m-3) \neq 0$ أي

$$m \in IR - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

37 1) الحالة $P = C$ نجد : $\beta = -\frac{4}{3}$ الحالة 2) $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{AB}$ نجد : $\beta = -\frac{2}{15}$

38 يفضل إستعمال خاصية التجمع لإنشاء المرجح في هذه الحالات

39
1) $G = \{(A,1)(B,1)(C,1)\}$
2) $G = \{(A,5)(B,-3)(C,-1)\}$
3) $G = \{(A,6)(B,-6)(C,-1)\}$
4) $G = \{(A,-5)(B,3)(C,-2)\}$
5) $G = \{(A,-1)(B,-3)(C,2)\}$
6) $G = \{(A,-1)(B,0)(C,-4)\}$

40 1) نعتبر النقطتين $G_1 = \{(A,-1)(C,2)\}$ ثم منتصف $[G_1B]$ 2) نعتبر I منتصف $[BC]$ ثم $F = \{(I,-2)(A,1)\}$ 3) $G = \{(B,2)(C,1)\}$ 4) إختيار كيفي 5) إختيار $I_1 = \{(A,3)(B,-2)\}$ ثم منتصف $[I_1C]$ 6) $J = C$

41
1) $G = \{(A,-3)(B,4)(C,2)\}$
2) $G = \{(A,2)(B,-5)(C,-5)\}$
3) $G = \{(A,2)(B,0)(C,-1)\}$
4) $G = \{(A,0)(B,1)(C,1)\}$
5) $G = \{(A,1)(B,-2)(C,4)\}$

42 بالنسبة للحالة الأولى :

$D = \{(A,1)(B,1)(C,-1)\}$ معناه

$A = \{(B,1)(C,-1)(D,-1)\}$ معناه

$B = \{(A,1)(C,-1)(D,-1)\}$ معناه

$C = \{(A,1)(B,1)(D,-1)\}$

43 1) ننشئ I منتصف $[AC]$ ثم G هو منتصف $[IB]$ 2) $(\alpha,\beta,\gamma) = (-4,2,1)$

44 1) لأن : $1+2+(-4) \neq 0$

2) $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ و ننشئ باستعمال خواص الجمع الشعاعي

45 2) باستعمال العلاقة

$$\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$$

(حيث $K=\{(B,-2)(C,3)\}$)

وبملاحظة أن G منتصف $[AK]$ و I و J منتصفي $[AB]$ و $[AC]$ يمكن أن نبرهن أن : $\overrightarrow{IG}=3\overrightarrow{IJ}$

46 1) يمكن إنشاء النقط G, H, K لأن : $-3+2\neq 0$ و $-2+1\neq 0$

2) يمكن إستعمال مبرهنة طاليس للبرهان على أن : $\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{GK}$

47 1) يمكن إستعمال الجمع الشعاعي و خواص قطري متوازي أضلاع أو إستعمال علاقة شال وخواص منتصف قطعة

1) من العلاقة الشعاعية المبرهنة في 1) ينتج : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AI}=\vec{0}$ و منه :

$A=\{(I,-2)(B,1)(C,1)\}$

48 1) الإنشاء

2) $I=\{(A,0)(B,1)(C,1)\}$

$J=\{(A,1)(B,-2)(C,-1)\}$

49 1) ننشئ باستعمال العلاقة : $\overrightarrow{IB}=3\overrightarrow{BC}$ 2) G منتصف $[AI]$ لأن : $G=\{(I,1)(A,1)\}$

50 1) الجملتين تقبلان مرجحين لأن مجموع المعاملات غير معدوم

2)بجمع المساوتين: $\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KA}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{LC}+3\overrightarrow{LA}=\vec{0}$

وَباستخدام علاقة شال في المساوتين نجد :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+4\overrightarrow{LG}-\overrightarrow{KG}=\vec{0}$ أي

$-\overrightarrow{GK}+4\overrightarrow{GL}=\vec{0}$ (لأن G مركز ثقل المثلث ABC)

51 1) يمكن للإنشاء إستعمال الخاصية : $\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{BM}-3\overrightarrow{CM}$ وَ نأخذ مثلا : $M=A$

نجد $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{CA}$ أي $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{BC}$ (2

السؤال الأول ($\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{BC}$) يجيب عن هذا السؤال

52 2)نستعمل خاصية التجميع فنكتب :

$M=\{(A,1)(B,1)(C,1)(D,3)\}$

أي : $M=\{(G,3)(D,3)\}$ أي أن G منتصف $[GD]$

3) نعتبر الآن أن : $M=\{(I,2)(F,4)\}$ أي M,I,F في إستقامية

4) نعتبر الآن أن :

$M=\{(L,4)(P,2)\}$ حيث : $P=\{(B,1)(C,1)\}$

وَ $L=\{(A,1)(D,3)\}$ و البقية واضحة

53 لاحظ أنه يمكن أن نكتب :

$G=\{(A,1)(I,6)\}$ إذن $G\in(AI)$ ثم

$G=\{(B,2)(J,5)\}$ إذن $G\in(BJ)$

$G=\{(C,4)(H,3)\}$ إذن $G\in(CH)$

54 1) نكتب : $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}$

2) نعوض المساواة الموجودة في السؤال السابق في العلاقة : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ نجد :

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$ أي أن $G=\{(A,1)(I,1)\}$

3) نعوض النقطتين المثقلتين بنفس المعامل بمنتصفهما المثقل بمجموع المعاملين للنقطتين

55 1) يمكن أن نكتب: $H=\{(C',2)(J,3)\}$ أي أن:

$H=\{(A,1)(B,1)(B,1)(C,2)\}$ لأن

$$\begin{cases} C'=\{(A,1)(B,1)\} \\ J=\{(B,1)(C,2)\} \end{cases}$$

و بالتالي : $H=\{(A,1)(B,2)(C,2)\}$

2) إستعمل مبرهنة طاليس (لاحظ أن $(IJ)//(B'C')$)

56 2)لاحظ أن : $G=\{(I,3)(C,-2)\}$ لكن :

$I=\{(A,2)(B,1)\}$

وَبالتالي : $G=\{(A,2)(B,1)(C,-2)\}$

3) أ) $L=\{(B,1)(c,-2)\}$ و بالتالي $L\in(BC)$ و يمكن أن نكتب $G=\{(A,2)(L,-1)\}$ و بالتالي استخلص $L\in(AG)$

ب) بما أن $L=H$ وَ $\overrightarrow{BL}=2\overrightarrow{BC}$ فإن : $k=2$

57 1) اعلم أنه إذا كان G مركز ثقل مثلث فإن : $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GI}$ و لدينا $\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{GI}$

2) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=(\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IC})$

$\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{HG}$

3) $\overrightarrow{HA}=2\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$

و بالتالي : $H=\{(A,1)(B,-2)(C,-2)\}$

58 1) من المساواة : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ نجد :

$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=0$

2) من المساواة $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ نجد : $2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$

3) أ) استخدم علاقة شال مع المساواة $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=0$

ب)استخرج 3 عامل مشترك من المساواة (3-أ)

59 2) نكتب :

$H=\{(I,2)(C,1)(D,3)\}=\{(G,3)(D,3)\}$ أي

$H\in(DG)$

3)

$H=\{\{(A,1)(D,3)\}\{(B,1)(C,1)\}\}$

$H=\{(K,4)(J,2)\}$

أي $H\in(JK)$

4)

$H=\{\{(A,1)(B,1)\}\{(C,1)(D,3)\}\}$

$H=\{(I,2)(L,4)\}$ أي $H\in(IL)$

5) استخلص

60 1)الشكل من أجل $k=\frac{1}{3}$

2) من العلاقات :

$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

نجد

$3\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$, $3\overrightarrow{GJ}=2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}$, $3\overrightarrow{GL}$

$3\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}$, $3\overrightarrow{GL}=2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}$

و بجمع المساواات الثلاثة طرفا إلى طرف نجد :

$\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GL}=\vec{0}$

3) G هي مركز ثقل المثلث IJL

61 1) من $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ نجد : $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

أي : $K=\{(A,2)(B,1)\}$

ومن : $\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ نجد : $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ أي

$I=\{(C,2)(B,1)\}$

2) و 3) يمكن استعمال مبرهنة طاليس

- الرباعي $EKJI$ متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان

62 1) $I=\{(A,1)(B,2)\}$ ، $J=\{(B,2)(C,3)\}$

2) يمكن أن نكتب :

$H=\{(A,1)(B,2)(C,3)\}=\{(I,3)(C,3)\}$

أي H منتصف $[IC]$

و بما أن G منتصف $[IC]$

فإن : $G=H$ 3) لاحظ أن :

$G=H=\{(A,1)(J,5)\}$

63 1) بما أن :

$G=\{\{(A,-2)(B,-1)\}(C,2)\}=\{(I,-3)(C,2)\}$

فإن النقط G,J,A في استقامية

- بالنسبة للنقط G,I,C لاحظ أن :

$G=\{(A,-2)\{(B,-1)(C,2)\}\}=\{(A,-2)(J,1)\}$

2) من 1) $G\in(AJ)$ و $G\in(CI)$

3) لاحظ أن: A منتصف $[GJ]$ و أن C منتصف $[BJ]$

64 (1

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=2\overrightarrow{MI}$

2) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=AB$ معناه $\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=\frac{AB}{2}$ و E

هي الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها $R=\frac{AB}{2}$

65 1) الإنشاء

2) $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\right\|$ أي

3) $MG=MH$ (E) هي محور القطعة $[GH]$

66 1) من العلاقة $\overrightarrow{AK}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ نجد :

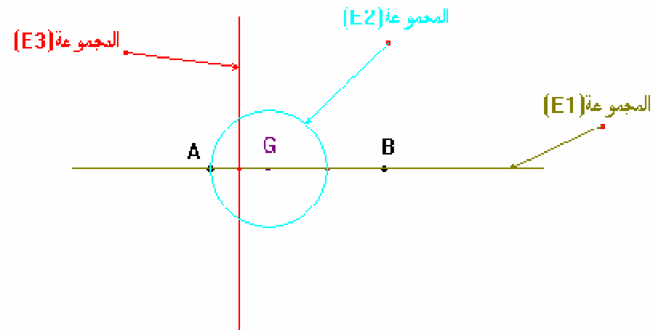
$5\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ أي $K=\{(A,5)(B,-3)\}$

2) $\left\|5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=AB$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MK}\right\|=AB$

أي $MK=\frac{AB}{2}$ و E_2 هي الدائرة التي مركزها K

و نصف قطرها $R=\frac{AB}{2}$

67 (2 أ) الشعاعان $2\vec{MA}+\vec{MB}$ و $\vec{AB}$ مرتبطان خطيا معناه $\vec{MG} // \vec{AB}$ و E_1 هو المستقيم (AB)



ب) $\left\|2\vec{MA}+\vec{MB}\right\| = AB$ معناه $MG=\frac{AB}{3}$ و E_2 هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $R=\frac{AB}{3}$

جـ) $\left\|2\vec{MA}+\vec{MB}\right\| = 3MA$ معناه $MG=MA$ و E_3 هي محور القطعة $[GA]$

68 1) و 2)ينشأ الشكل كما تقدم

3): $\left\|3\vec{MA}-\vec{MB}\right\| = \left\|-2\vec{MC}+4\vec{MD}\right\|$ تكافئ $MG=MK$ ومجموعة النقط هي محور القطعة $[GA]$

69 1) ينشأ الشكل كما تقدم

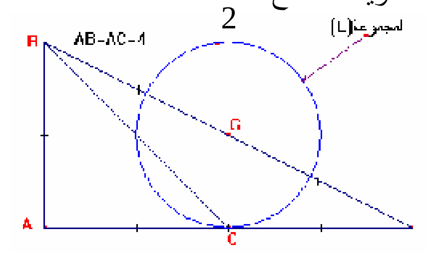
2) المجموعة E هي الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها 2

3) المجموعة E' هي محور القطعة $[CD]$

70 1) الدالة f ترفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث : $\vec{MM'}=2\vec{MG}$ أي أن $\vec{GM}+\vec{GM'}=\vec{0}$ أي أن الدالة f ترفق بكل نقطة M من المستوي نظيرتها M' بالنسبة إلى G

2)أ) $\vec{u}=\vec{MM'}$ معناه $\vec{MM'}=\vec{BA}+\vec{CA}$ و الدالة g ترفق بالنقطة M النقطة M' صورتها بالإنسحاب شعاعه $\vec{u}$

ب) المجموعة E هي الدائرة التي مركزها G و تصف قطرها طويلة الشعاع $\frac{\left\|\vec{u}\right\|}{2}$



71 1) $\vec{MA}-\vec{MB}-2\vec{MC}=-2\vec{MG}$

2) $M\in(E)$ تكافئ $\left\|-2\vec{MG}\right\|=4$ تكافئ $\left\|\vec{MG}\right\|=2$

3) المجموعة (E) هي الدائرة التي مركزها G و تصف قطرها 2

72 1)الرباعي $ABCG$ فيه قطران متناصفان و ضلعان متتابعان متقايسان

2) أ) E هي الدائرة التي مركزها G و تصف قطرها $R=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ب) منتصف $[AC]$ نقطة من E لأن $GI=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

73 1) نكتب

$$G=\{\{(B,-1)(C,-1)\}(A,4)\}=\{(A,4)(I,-2)\}$$

$$G=\{(A,2)(I,-1)\}$$

2) $A=\{(G,2)(B,1)(C,1)\}$ 3) هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $R=\frac{BC}{2}$

74 1) ننشئ كما تقدم

2) نكتب من جهة :

$$G=\{(A,1)\{(B,4)(C,-2)\}\}=\{(A,1)(J,2)\}$$

أي أن $G\in(AJ)$ وَ من جهة أخرى :

$$G=\{\{(A,1)(B,4)\}(C,-2)\}=\{(I,5)(C,-2)\}$$

أي أن : $G\in(CI)$

3) نجد : $MI=MJ$ و مجموعة النقط هي محور القطعة $[IJ]$

4) نجد : $MG=\frac{4}{3}AC$ و مجموعة النقط هي الدائرة مركزها G و نصف قطرها $R=\frac{4}{3}AC$

75 1)نسمي $G_1=\{(A,3)(B,5)(C,2)\}$ وَ $G_2=\{(A,3)(C,2)\}$ نجد : $MG_1=MG_2$ والمجموعة E_1 هي محور القطعة $[G_1G_2]$

2) نجد : $\vec{MG_1}=\frac{3}{10}\vec{AC}$ و مجموعة النقط E_2 هي النقطة M التي تحقق هذه المساواة

3) نجد : $\left\|-5\vec{AB}+2\vec{AC}\right\|=10MG_2$ و مجموعة النقط E_3 هي الدائرة مركزها G_2 و نصف قطرها

$$R=\frac{\left\|-5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right\|}{10}$$

76 1) نكتب : $a\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+a\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي :
$a\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{DB}$ لكن $ABCD$ مستطيل إذن
$a=1$

2) نلاحظ أن :
$u(M)=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$ وَ
$v(M)=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}$
للشعاعان $u(M)$ وَ $v(M)$ نفس الطويلة
معناه $MD=\left\|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\right\|$ و مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها D و تشمل النقطة B

77 1) $M'=\{(A,-1)(B,1)(M,2)\}$ تكافئ
$\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}$
استخلص

2) $M''=\{(A,1)(B,1)(M,-1)\}$ تكافئ
$\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM''}=\vec{0}$ استخلص

3) عندما تمسح النقطة M الدائرة التي مركزها A و تشمل I
أ) النقطة M' تمسح الدائرة التي مركزها I و تشمل A
ب) النقطة M'' تمسح الدائرة التي مركزها B و تشمل I

78 2) أ) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$
ب) أكتب : $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$ وَ
$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$
جـ) أنظر الشكل
د) $AD=4\sqrt{2}$, $AG=\sqrt{2}$

3) أ) نجد : $MG=\sqrt{2}$ دائرة مركزها G و نصف قطرها $R=\sqrt{2}$

79 1) بما أن $k+(k+1)+(k-1)+(-3k+1)=1$
فإن G معرفة من أجل كل قيمة لـ k

2) لاحظ أن $ABCD$ متوازي أضلاع و بالتالي :
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ إذن :
$A=\{(B,1)(C,-1)(D,1)\}$

- باستخدام علاقة شال (أستعمل النقطة A في الأشعة $\left(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GD}\right)$ و غستخدام العلاقة :

$$k\overrightarrow{GA}+(k+1)\overrightarrow{GB}+(k-1)\overrightarrow{GC}+(-3k+1)\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

نجد :

$$\overrightarrow{GA}+k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$

لكي نجد : $\overrightarrow{AG}=2k\overrightarrow{DB}$

3) مجموعة النقط هي المستقيم الذي شعاع توجيهه $\overrightarrow{DB}$ و يشمل النقطة A

80 1) ننشئ كما تقدم النقطتين :
$G_1=\{(A,2)(B,1)(C,-1)\}$ وَ
$G_{-1}=\{(A,2)(B,-1)(C,1)\}$ وَ النقاط I

2) النقطة G_k لأن ك
$(k^2+1)+(k)+(-k)\neq 0$ من أجل كل عدد حقيقي k
- باستخدام علاقة شال في المساواة :
$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}=k\overrightarrow{G_kC}-k\overrightarrow{G_kB}$ (النقطة B في $(G_kC$ نجد $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

3) إذا انطبقت N على G_k فإن G_k يقع على (BC) و يكون عندئذ معامل النقطة A معدوم أي أن : $k^2+1=0$ وَ هذا مستحيل على المجموعة IR

4) لاحظ أن الدالة f متناقصة على المجال $[-1,+1]$ ، النهاية الحدية الكبرى هي $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ و النهاية الحدية الصغرى هي $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$

5) مجموعة النقط G_k هي القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$ من المستقيم الذي يوازي $\overrightarrow{BC}$ وَ يشمل A

81 : 1) المثلث ABC قائم في B 2) (Γ_1) هو المستقيم الموازي لـ AC و يشمل
$G=\{(A,1)(B,2)(C,1)\}$

3) (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها $G=\{(A,1)(B,2)(C,1)\}$ و نصف قطرها
$R=\frac{1}{4}AC$

4) أ) لاحظ أن : $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$
وَ $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|$
ب) نعوض النقطة M بالنقطة B في المساواة (4 بالنسبة لـ B' لاحظ أنه و بعد التعويض

$\|2\overrightarrow{BB'}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ و $\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{B'C}=\vec{0}$

جـ)

82. 1) نكتب :

$G=\{\{(A,1)(B,2)\}(C,3)\}=\{(J,3)(C,3)\}$ أي

أن $G\in(JC)$ ثم G منتصف $[JC]$

2) الشعاعان $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$ و

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$ مرتبطان خطيا معناه $\overrightarrow{MG}//\overrightarrow{MI}$ حيث :

منتصف $[AC]$ و المجموعة (E) هي المستقيم (IG)

3) يمكن لذلك استعمال النقطة K منتصف $[AB]$

و بملاحظة أن G منتصف $[JC]$

83. 1) لاحظ أن :

$G=\{\{(A,1)(C,1)\}(B,2)\}=\{(I,2)(B,2)\}$

حيث : I منتصف $[AC]$ و بالتالي G منتصف $[IB]$

2) (E_1) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها

$R=\frac{AC}{4}$

3) أ) لاحظ أن : $\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

للتحقق نعوض النقطة N بالنقطة B

ب) المجموعة (E_2) هي الدائرة مركزها G و تشمل النقطة B

84. 1) المجموعة (Δ) هي محور القطعة $[G_1G_2]$ حيث : $G_1=\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$

و $G_2=\{(D;4)(E,-1)\}$

2) لاحظ أن : $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{ED}$ و باعتبار

$G_3=\{(A,1)(B,-1)(C,1)\}$ المجموعة (Γ) هي

الدائرة التي مركزها

النقطة G_3 و نصف قطرها ED

85. 1) $J=\{(A,3)(B,-2)(C,4)\}$

2) نبرهن أن : $\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{GC}$

3) هي الدائرة مركزها I و نصف قطرها IA

86. 1) يكون G_k إذا وفقط إذا كان : $k\in IR-\{0\}$

2) نستعمل علاقة شال و المساواة

$:k\overrightarrow{G_kA}-\overrightarrow{G_kB}+\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$

2) الرباعي $ABCG_1$ متوازي أضلاع لأن :

$\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{BC}$ 3) هو نصف مستقيم حده G_1 و يوازي (BC)

87. 1) G_m موجود لأن :

$(2m)+(1-m)+(2-m)\neq 0$ من أجل كل عدد حقيقي m

2) $G_1=\{(A,2)(B,0)(C,1)\}$ في الثلث من $[AC]$ قريبا من A

3) $\overrightarrow{AG_m}=\frac{1-m}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2-m}{3}\overrightarrow{AC}$

4) نستعمل العلاقة المبرهنة في 3) و علاقة شال

4) مجموعة النقط هي المسقيم الموازي لـ $\overrightarrow{AD}$ و يشمل G_1

88. 1) $G=\{(A,2)(B,-3)(C,-5)\}$ و تكون

إحداثيي G في المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$: $G\left(\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right)$

ملاحظة : نتناول بنفس الطريقة 2) و 3)

89. 2) $G(1,0)$ 3) ب) بحساب المركبتين السلميتين

لـ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ 4) $C=\{(A,-6)(B,1)\}$

90. 2) $M\left(\frac{5}{2},0\right)$ و $N(0,5)$ 3) أ) $I\left(\frac{3}{2},2\right)$

ب) $\overrightarrow{MI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{MN}$ جـ) $I=\{(M,3)(N,2)\}$

91. 2) $G\left(-\frac{2}{3},1\right)$ 3) $H(-5,4)$ 4) ليست في

استقامية

92. 2) $G(-5,6)$ 3) $K\left(\frac{3}{5},-\frac{14}{5}\right)$ 4)

$G=\{(A,-3)(B,-2)(C,4)\}=\{(K,5)(C,4)\}$

أي أن $G\in(KC)$

بالحساب نجد : $\overrightarrow{CG}\binom{-7}{11}$ و $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}-\frac{7}{5}\\ \frac{11}{5}\end{pmatrix}$

و منه : $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CK}$

93. 1) لأن : $3+7\neq 0$ 2)

3) $\overrightarrow{OG}=\frac{3}{10}\overrightarrow{OA}+\frac{7}{10}\overrightarrow{OB}$ $G\begin{pmatrix}\frac{11}{10}\\ -\frac{4}{4}\end{pmatrix}$

94. 2) $G(5,-6)$ 3) يمر المستقيم (BG) بمبدأ

المعلم O إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{OB}//\overrightarrow{OG}$

95 2) $H(2,6)$ 3) $G\left(2,\frac{13}{3}\right)$ 4) بفرض : $x+1\neq 0$ و نحل الجملة : $\begin{cases}\frac{2-x}{1+x}=1\\ \frac{1+5x}{1+x}=\frac{5}{2}\end{cases}$ و x غير موجود

96 1) $BCDE$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}$ أي $E(4,-1)$ 2) $G\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3) لدينا : $L=\{(B,1)(C,1)(D,1)(E,1)\}$ و منه : $L(1,-2)$ و نبرهن أن : $\overrightarrow{LA}=3\overrightarrow{LG}$

4) أ) استعمل خواص الجمع الشعاعي في الهندسة التحليلية وَ G هو مركز ثقل المثلث ABD

5) نكتب :

$G=\{(A,2)\{(B,1)(C,1)\}\{(D,1)(E,1)\}\}$

$G=\{(A,2)(I,2)(J,2)\}=\{(A,1)(I,1)(J,1)\}$

97 1) $B'(4,2)$ وَ $K(2,1)$

2) $(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ 3) $J\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ 4) لاحظ أن $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{IJ}$

98 نكتب : $100\overrightarrow{GA}+x\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ و نلاحظ أن :

$\overrightarrow{GB}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AG}$ نجد : $M_B=40g$

99 $G=\{(H,1)(H',1)(O,16)\}=\{(I,2)(O,16)\}$

$G=\{(I,1)(O,8)\}$ حيث : I منتصف $[HH']$ و ننشئه

باستخدام المساواة : $\overrightarrow{IG}=\frac{8}{9}\overrightarrow{IO}$ و لحساب المسافة OG

نلاحظ أن $OI=OH\cdot\sin(52,5°)$ وَ $OG=\frac{1}{9}OI$

100 نعتبر في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$ النقط :

$A(0,0),B(0,18),C(13,18),D(25,0)$ و

نحسب إحداثيي مركز المسافات المتساوية لهذه النقط

101 الطريقة الأولى :

1) مركز عطالة الصفيحة $IBCD$ وَ H مركز عطالة الصفيحة $AIEF$ و بالتالي مركز عطالة الصفيحة $ABCDEF$ هو مركز عطالة O وَ H إذن $G\in(OH)$

2) بنفس الطريقة لكن نعتبر المستطيلين $ABCJ$ وَ $JDEF$ نبرهن أن $G\in(O'H')$ استخلص

الطريقة الثانية :

$G=\{(O,2)(H,3)\}$ لأن مساحة المستطيل $IBCD$ هي 2 وَ مساحة المستطيل $AIEF$ هي 3

في المعلم $(A,\vec{I},\vec{J})$ لدينا : $H\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ وَ $O\left(2,\frac{1}{2}\right)$ و بالتالي : $G\left(\frac{11}{10},\frac{11}{10}\right)$

102 الطريقة 1 : نعتبر O_1 مركز المستطيل $ABCI$ وَ O_2 مركز المستطيل $IDEF$ و مركز عطالة الصفيحة هو $G=\{(O_1,2)(O_2,4)\}=\{(O_1,1)(O_2,2)\}$

و هناك طرق أخرى

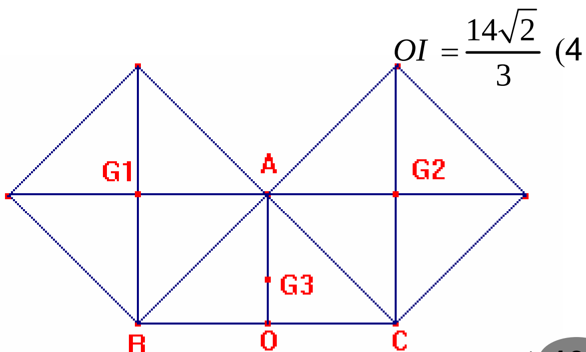
103 نحسب إحداثيي مرجح الجملة :

$\{K_{300}(5,5),L_{600}(15,5),J_{100}(10,15)\}$

104 2) $I\in(OA)$ لأن : A هو منتصف $[G_1G_2]$ و G_3 ينتمي إلى (OA)

3) لاحظ أن : $I=\{(G_1,36)(G_2,36)(G_3,18)\}$

4) $OI=\frac{14\sqrt{2}}{3}$



105 أ) نعتبر مركز ثقل المثلث ABI حيث I منتصف $[AC]$ المثقل بالمعامل 3 و مركز ثقل المثلث CID المثقل بالمعامل 1

ب) هو مركز ثقل مراكز ثقل المثلثات OAB,OAD,ODC

جـ) هو مرجح الجملة $\{(O_1,1)(O_2,4)\}$ حيث O_1 مركز الدائرة ذات أصغر نصف قطر

د) نعتبر الخمس مستطيلات الأفقية المثقل بالمعامل 5 و مركز الثلاث مستطيلات الأخرى المثقلة بـ 3

106 : يمكن إعتبار مراكز الثلاث مربعات التي تقايس المربع المنزوع المثقلة بنفس المعامل أو إعتبار مركز أحد المربعات المثقل 1 و المستطيل (إتحاد مربعين) المثقل 2

109 1) الشعاعان $\overrightarrow{PB}$ وَ $\overrightarrow{PC}$ مرتبطان خطيا إذن يوجد عدد حقيقي p بحيث : $\overrightarrow{PB}=p\overrightarrow{PC}$ إذن :

$P=\{(B,1)(C,-p)\}$ و بنفس الطريقة بالنسبة لـ Q وَ R

2) نستعمل السؤال السابق لإثبات أن :

$$P\begin{pmatrix}\frac{1}{p-1}\\ \frac{p}{p-1}\end{pmatrix} ، Q\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-q}\end{pmatrix} \quad R\begin{pmatrix}\frac{r}{r-1}\\ 0\end{pmatrix}$$

3) نستعمل $\overrightarrow{PQ}\,//\,\overrightarrow{PR}$

4) $\overrightarrow{PC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

110 2) لاحظ أن G هو نقطة تقاطع المتوسطين في المثلث ABC إذن G هو مركز ثقله

3) ب) نكتب : $K=\{(A,1)(B,1)(C,1)(C,-2)\}$

$K=\{(G,3)(C,-2)\}$

4) أ) من العلاقة (1) و باستعمال علاقة شال نجد :

$\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

ب) نكتب :

$A=\{(D,1)(G,3)(C,-2)\}=\{(D,1)(K,1)\}$

5) المجموعة (E) هي محور القطعة $[AI]$

6) أ) I_m موجود إذا و فقط إذا كان : $m\in IR-\{-1\}$ ب) نكتب : $I_m=\{(D,m)(K,1)\}$ و العلاقة

الشعاعية : $m\overrightarrow{I_mD}+\overrightarrow{I_mK}=\vec{0}$ و علاقة شال

جـ) الدالة متناقصة تماما على مجموعة تعريفها

د) و المحل الهندسي للنقطة I_m هو المستقيم (AD) بإستثناء D

111 1) المحل الهندسي للنقطة G_m هو المستقيم Δ الذي يشمل A و يوازي $\overrightarrow{BC}$

3) في المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ النقطة I هي تقاطع (BG_m) وَ محور التراتيب و يمكن لذلك تعيين معادلة المستقيم (BG_m) و نفس الشيء بالنسبة للنقطة J (لكن مع محور الفواصل)

و للبرهان على أن النقط J,I,O في استقامية نعبر عن $\overrightarrow{OI}$ بدلالة $\overrightarrow{OJ}$

112 1) لأجل $k=-1$

أ) $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{IA}$ ب) التحويل هو إنسحاب شعاعه $2\overrightarrow{IA}$

2) لأجل : $k=2$ جـ) نكتب :

$G=\{(A,2)(B,-1)(C,2)\}=\{(J,1)(B,-1)\}$

وبالتالي $G\in(BJ)$

د) $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$ هـ) التحويل هو تحاكي مركزه G و نسبته (- 2)

3) أ) المجموعة (E_1) هي الدائرة التي قطرها $[B'C']$ حيث B',C' صورتا B,C بالإنسحاب

ب) المجموعة (E_2) هي الدائرة التي قطرها $[B''C'']$ حيث B',C' صورتا B,C بالتحاكي

113 1) بالتبادل الداخلي $\widehat{IAC}=\widehat{ACD}$ وَ $\widehat{CDA}=\widehat{IAB}$ استخلص

و باستخدام مبرهنة طاليس يمكن أن نكتب :

$\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AD}$ لكن : $AD=AC$ و منه النتيجة

2) من المساواة : $\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}$ يمكن أن نكتب :

$b\overrightarrow{IB}=c\overrightarrow{CI}$ و بالتالي : $I=\{(B,b)(C,c)\}$

(3

$$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+\left(b\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{OI}+c\overrightarrow{IC}\right)$$

$$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+(b+c)\overrightarrow{OI}$$

لأن : $I=\{(B,b)(C,c)\}$

و بما أن : $O=\{(A,a)(B,b)(C,c)\}$ فإن :

$a\overrightarrow{OA}+(b+c)\overrightarrow{OI}=\vec{0}$ و بالتالي : $O\in(AI)$

و بطريقة مماثلة نبرهن أ ن : $O\in(CK)$ وَ $O\in(BJ)$

114 I- 1) أ) وَ ب) لاحظ أن : مساحة ($AA'B$) $=\frac{1}{2}hA'B=\frac{1}{2}dAB$

وَ أن : مساحة ($AA'C$) $=\frac{1}{2}hA'C=\frac{1}{2}dAC$

وبالتالي : $\frac{h}{d}=\frac{AB}{A'B}=\frac{AC}{A'C}$

و بالتالي : $A'=\{(B,b)(C,c)\}$

2) نتناول بنفس الطريقة

3) نعتبر العبارة الشعاعية : $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}$ و نكتبها على ثلاثة طرق كما في التمرين 113

II 1) أ) لاحظ أن : $tg\beta=\frac{AK}{BK}$ وَ $tg\gamma=\frac{AK}{KC}$ و

بالتالي $\frac{KB}{KC}=\frac{tg\gamma}{tg\beta}$

ب) بجداء الوسطين و الطرفين (استعمل الأشعة مع مراعاة التوجيه) نجد : $K=\{(C,tg\gamma)(B,tg\beta)\}$

جـ) نتناول بنفس الطريقة

د) انظر الفرع I

115 I - يطلب دراسة تغيرات الدالة f

II 1) أ) المحل الهندسي للنقطة K هي القطعة المستقيمة $[AA']$ حيث $A'(4,8)$

المحل الهندسي للنقطة L هي القطعة المستقيمة $[OO']$ حيث $O'(0,8)$

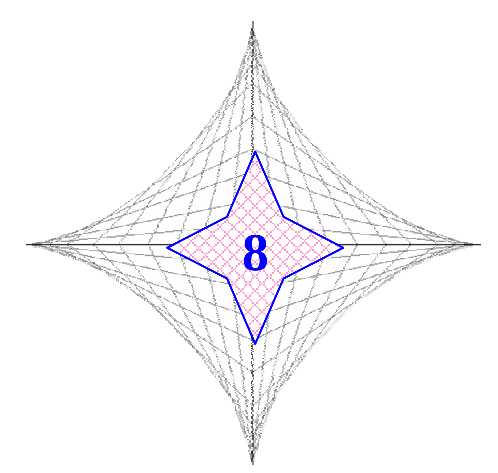
ب) G_1 ثابتة لأن : $G_1\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$ وبما أن :

$G_2\left(\frac{4}{3},\frac{8-k}{3}\right)$ فإن G_2 تتغير على المستقيم الذي معادلته : $x=\frac{4}{3}$

2) مساحة (AKL)= $2k$ وَ مساحة (OAL)= $2(8-k)$

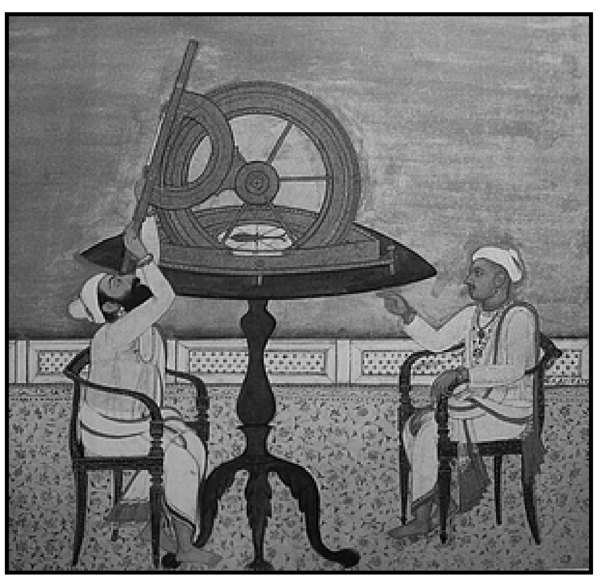
3) أ) لأجل ذلك نحسب إحداثيي النقطتين G_1 وَ G_2 ثم نحسب إحداثيي G مرجح النقطتين G_1 وَ G_2 المثقلتين بالعددين $2k$ وَ $2(8-k)$ على الترتيب

ب) نتحقق أن إحداثيي النقطة G تحقق معادلة الدالة f ومجموعة النقط G هي النقط من منحني الدالة f و التي فواصل إحداثييها من المجال $[0,8]$



الزوايا الموجهة حساب المثلثات

الكفاءات المستهدفة



- استعمال خواص الزوايا الموجهة لإثبات تقايس الزوايا.
- تعيين أقياس زاوية موجهة لشعاعين.
- توظيف دساتير التحويل المتعلقة بجيب التمام و بالجيب في حل مسائل مثلثية.
- حل معادلات و متراجحات مثلثية.

يعتمد هذا الفصل على المعارف السابقة (الدائرة المثلثية ، لف المجموعة R على الدائرة المثلثية ، الراديان ، الدالتين sin و cos) .

أهم النقط التي تعالج خلال هذا الفصل هي :

- **تعليم نقطة على الدائرة المثلثية بعدد معرف بتقريب مضاعف للعدد 2π**
- **مفهوم الزاوية الموجهة (نعرف القياس انطلاقا من التعليم على الدائرة دون اللجوء الى الأقواس الموجهة)**
- **التعليم القطبي لنقطة M ، $\overrightarrow{OM} = r(\cos\vec{i} + \sin\vec{j})$**
(الإنتقال من الإحداثيات القطبية الى الديكارتية و العكس ، حل معادلات مثلثية بسيطة)
- **دساتير الجمع باستعمال التعليم القطبي**
- **المتراجحات المثلثية البسيطة (استعمال الآلة الحاسبة)**

الأنشطة

النشاط الأول :

– **الهدف : تحويل الدرجات الى راديان و العكس**

النتائج هي :

$142,5:10,5:52,5:75:67,5:\frac{2\pi}{3}:\frac{7\pi}{12}:\frac{\pi}{5}:\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{12}$

النشاط الثاني :

– **تعيين صور أعداد حقيقية على الدائرة المثلثية**

1) C نظيرة A بالنسبة للنقطة O
2) B نظيرة A بالنسبة للمستقيم (OJ)
3) D نظيرة A بالنسبة للمستقيم (OI)
4) E نظيرة A بالنسبة للمنصف الاول
5) F نظيرة E بالنسبة للمستقيم (OJ)
6) G نظيرة E بالنسبة للنقطة O
7) H نظيرة E بالنسبة للمستقيم (OI)
8) النقط المرفقة هي على الترتيب : H ; E ; C ; G ; D ; F ; B
9) M هي نقطة تقاطع (C) مع منصف الزاوية $\widehat{FOJ}$

النشاط الثالث :

– **الهدف : تعيين الصور بمعرفة أطوال الأقواس**

1) تعيين النقطة C (باستعمال المدور) تنصيف القوس $\widehat{AA'}$ مرتين حيث $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})=\pi$ و A' نظيرة A بالنسبة لـــ O

تعيين النقطة D بتنصيف القوس $\widehat{CC'}$ حيث OCC' مثلث متقايس الأضلاع (C' على يسار C)

تعيين النقطة E بتنصيف القوس $\widehat{DD'}$ حيث D' نظيرة D بالنسبة للنقطة O

تعيين النقطة F بأخذ 5 مرات القوس $\widehat{CD}$ انطلاقا من E (نحو الإتجاه الموجب)

2) **تصحيح** : تكتب مرة أخرى $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{4}$

تعيين D بأخذ القوس $\widehat{AC}$ ثلاث مرات انطلاقا من C (نحو الإتجاه الموجب)

تعيين E بتنصيف القوس $\widehat{DD'}$ حيث D' نظيرة D بالنسبة للنقطة O

تعيين F بأخذ القوس $\widehat{EF'}$ مرتين انطلاقا من E نحو الإتجاه الموجب حيث EOF' مثلث متقايس الأضلاع (F' على يسار E)

تصحيح : في الفرعين 3) و 4) نأخذ كذلك

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{4}$

نتبع نفس الطريقة لتحديد النقط F ; E ; D مع أخذ القيس الرئيسي $\frac{41\pi}{6}=6\pi+\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{17\pi}{4}=4\pi+\frac{\pi}{4}$

النشاط الرابع :

الهدف : تعيين الصور بمعرفة أطوال الأقواس مع مراعاة الإتجاه

1) – تعيين النقطة c باعتبار أن المثلث OAC متقايس الأضلاع (C على يمين A)

– تعيين النقطة D بتنصيف القوس $\widehat{DD'}$ حيث D' نظيرة D بالنسبة للنقطة O مرتين (مع مراعاة الإتجاه)

– تعيين النقطة E بأخذ القوس $\widehat{DE'}$ مرتين في الإتجاه السالب انطلاقا من D حيث ODE' مثلث متقايس الأضلاع و E' على يمين D

– تعيين النقطة F بتنصيف القوس $\widehat{EF'}$ باعتبار أن المثلث OEF' متقايس الأضلاع (F' على يمين E)

الفروع 2 – 3 – 4 بنفس الطريقة و أخذ الأقياس الرئيسية .

الأعمال الموجهة

أعمال موجهة (1) :

–1– المتراجحات المثلثية من الشكل $Cosx \prec a$

الهدف : حل متراجحات مثلثية

1) $a\le -1$ المتراجحة لا تقبل حلا و $a\ge -1$ المتراجحة محققة دوما لأن $-1\le Cosx\le 1$ من أجل كل عدد حقيقي x

2) $-1\prec a\prec 1$ يوجد عددان α و ($-\alpha$) حيث $Cox\,\alpha = Cos(-\alpha)=a$ و $\beta=-\alpha$ و بالتالي M نظيرة M' بالنسبة لمحور الفواصل

مجموعة النقط من الدائرة المثلثية و التي فواصلها أصغر من a هي نقط القوس $\widehat{MM'}$ (نحو الإتجاه الموجب)

حلول المتراجحة (1) هي $]\alpha,2\pi-\alpha[$

تطبيق : $S_1=\left]\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right[$ ،

$S_3=\left[0,\frac{\pi}{12}\right[\cup\left]\frac{\pi}{12},\pi\right[$ ،

$S_4=\left[0,\frac{\pi}{12}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right[$

–2– $S_1=\left]\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right[$ ،

$S_2=\left[0,\frac{\pi}{16}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{16},\frac{\pi}{2}\right[$ ،

$S_3=\left]0,\frac{4\pi}{15}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{5}\right[$ ، $S_4=\left]\frac{\pi}{16},\frac{3\pi}{16}\right[$

أعمال موجهة (2) :

–1– معادلات من الشكل $Cosu=Sinv$

الهدف : حل المعادلات من الشكل $Cosu=Sinv$

* $S=\left\{\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{2},\frac{-\pi}{24}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

* تمثيل الصور $\frac{23\pi}{24},-\frac{\pi}{24},\frac{77\pi}{48},\frac{53\pi}{48},\frac{29\pi}{48},\frac{5\pi}{48}$

-2- معدلات من الشكل :

$aCosx+bSinx=c$

الهدف : حل معادلات من الشكل $aCosx+bSinx=c$

تطبيق : $S_1=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ ،

$S_2=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ ،

$S_3=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,-\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

-4 * $m\succ 2$ أو $m\prec -2$ ، S مجموعة خالية

* $-2\prec m\prec 2$ نضع $\frac{m}{2}=Cos\alpha$

التمارين

أصحيح أم خاطئ : من1 إلى 8

رقم السؤال	1	2	3	4
الحكم	خاطئ	خاطئ	صحيح	صحيح

رقم السؤال	5	6	7	8
الحكم	صحيح	خاطئ	خاطئ	صحيح

أسئلة متعددة الاختيارات : من 9 إلى 16

رقم السؤال	9	10	11	12	13	14	15	16
1الإجابة الصحيحة	2	2	3	1	3	3	1	1

17

القيس x	القيس الرئيسي	أصغر قيس موجب	$\widehat{AOB}$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{53\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{2007\pi}{3}$	π	π	π
493π	π	π	π

18 $-\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{2},-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}$

19 المثلث ABC قائم في C

20 $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{7\pi}{12}$

22 $M\left(\frac{\pi}{3}\right),N\left(\frac{3\pi}{4}\right),P\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

24 25 26 نحسب y-x و يكون مضاعف 2π

27
1. $\alpha=\frac{14\pi}{3}\leftarrow\frac{2\pi}{3}$
2. $\alpha=-\frac{35\pi}{2}\leftarrow\frac{\pi}{2}$
3. $\alpha=\frac{721\pi}{5}\leftarrow\frac{\pi}{5}$
4. $\alpha=\frac{2007\pi}{3}\leftarrow\pi$

28
1. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ هو $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
2. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)$ هو $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
3. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{CB}\right)$ هو $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
4. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{DO}\right)$ هو $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
5. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}\right)$ هو $\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$
6. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}\right)$ هو $\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

29
1. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ هو $\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$
2. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)$ هو $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
3. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}\right)$ هو (π)
4. القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}\right)$ هو $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

30

1	2	3	4	5
$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

31 .1 $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .2 $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ .3 $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ يشطب

.4 التكرار $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

36 $A=\sin x-2\cos x$

37 $A=2\sin x$

38 $A=-\cos x$

39 $A=-2\cos x$

40 $A=-2\sin x$

41 $A=\tan x$

42 .1 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$

2. $\cos x - \sin x$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

43 2). $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3). بوضع : $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

45 3). باستعمال دساتير التحويل من النصف إلى الضعف

50 2). $\sin x = -\frac{4}{5}$ ، $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3}{5}$ ،

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\frac{4}{5}$ ، $\cos(\pi - x) = -\frac{3}{5}$ ،

$\sin(\pi - x) = -\frac{4}{5}$

3). $\tan x = -\frac{4}{3}$ ، $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = -\frac{3}{4}$ ،

$\tan(\pi - x) = \frac{4}{3}$

54 1).قيم x المرفقة للنقطة M هي: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ،

قيم x المرفقة للنقطة N هي: $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

2). إضافة العبارة : $\cos x = \frac{1}{2}$ الاستنتاج :

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

56 1). $x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{11\pi}{6}$ ، 2). $x = \frac{3\pi}{4}$ أو

$x = \frac{5\pi}{4}$ ، 3). $x = \frac{\pi}{4}$ أو $x = \frac{3\pi}{4}$ ، 4). $x = \frac{3\pi}{2}$

57 1). $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{\pi}{3}$ ، 2). $x = \frac{5\pi}{6}$ أو

$x = -\frac{5\pi}{6}$ ، 3). $x = -\frac{\pi}{6}$ أو $x = -\frac{5\pi}{6}$ ،

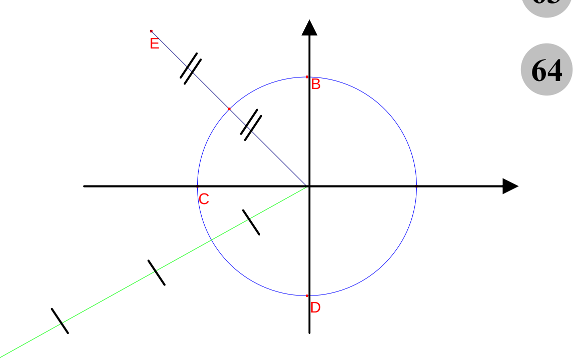
4). $x = -\frac{\pi}{4}$ أو $x = -\frac{3\pi}{4}$

61 بوضع: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و $\sin x = y$.

62 بوضع: $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

63 بملاحظة أن: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

64



65 تصحيح: عوض $B\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$ نكتب $B\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$

66 ملاحظة:الدائرة الوسطى غير مضبوطة على الرسم

$A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$ ، $B\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$ ، $C\left(4;\frac{5\pi}{6}\right)$ ، $D\left(4;-\frac{\pi}{3}\right)$ ،

$A'\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)$ ، $B'\left(4;\frac{4\pi}{3}\right)$ ، $D'\left(2;-\frac{\pi}{6}\right)$

$OM = 1$ ، $ON = 2\sqrt{2}$

67 1. القيس الرئيسي لـ $(\vec{I};\overrightarrow{OM})$ هو $-\frac{\pi}{3}$ ،

القيس الرئيسي لـ $(\vec{I};\overrightarrow{ON})$ هو $\frac{\pi}{4}$

2. القيس الرئيسي لـ $(\vec{J};\overrightarrow{OM})$ هو $-\frac{5\pi}{6}$ ،

القيس الرئيسي لـ $(\vec{J};\overrightarrow{ON})$ هو $-\frac{\pi}{4}$

3. $M\left(1;-\frac{\pi}{3}\right)$ ، $N\left(2\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$

69

4	3	2	1
$D\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$	$C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$	$B(0;2)$	$A(1;0)$

8	7	6	5
$H\left(\frac{1}{4};0\right)$	$G\left(-\frac{7}{4};0\right)$	$F(-2\sqrt{3};2)$	$E(-2;-2)$

70 $C\left(2\sqrt{2};\frac{7\pi}{12}\right)$

71 باستعمال العلاقة: 1). $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$

2). $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

73 بملاحظة أن: $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$ و $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$

74 1). $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، 2). $x = \frac{\pi}{12}$

75 1). $\cos 2x = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ، $\sin 2x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

3). بوضع : $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ ، $x = \frac{\pi}{10}$

78 1). وضع $\sin x = y$ ، 2). وضع $\cos x = y$ ، 3). وضع $\cos x = y$ $\Delta = (1+\sqrt{3})^2$

79 1). باستعمال دساتير الجمع ،

2). $f'(x) = \sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x + \frac{4\pi}{3})$

3). بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = 0$ (الدالة المعدومة) فإنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 0$

أي: $\sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$

عوض لتكن النقطة $A(1;\alpha)$ ذات الإحداثيات القطبية

نكتب لتكن النقطة A ذات الإحداثيات القطبية $(1;\alpha)$

80 1).

2). صورة C هي A

5). نستنتج أن: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ،

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3})\end{pmatrix}$ ،

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\cos(\alpha + \frac{4\pi}{3}) \\ \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3})\end{pmatrix}$

و باستعمال العلاقة الشعاعية السابقة نستنتج أن:

$\cos\alpha + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

و $\sin\alpha + \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

81 1). $E(x) = \cos^2 x.\sin^2 x$ ،

2). $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $x = k\pi$ ،

3). $D_f = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi; k \in Z\right\}$ ، $f(x) = 1$

82 1). $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ ،

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

2). $D_A = D_B = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi; k \in Z\right\}$ ،

$A = 4\cos 2x$ ، $B = 2$

ملاحظة : ترقيم الفرع الثاني ، 2. بسط العبارتين التاليتين.

83 1. $A(x) = \cos x(2\cos x + 1)$

2. $B(x) = \sin x(2\sin x + 1)$

3. $C(x) = \cos\frac{x}{2}(2\cos\frac{x}{2} + 1)$ .4

وضع $D(x)$ بدل $B(x)$

$D(x) = \sin\frac{x}{2}(2\sin\frac{x}{2} + 1)$

85 بضرب طرفي الكسر بالعدد : $(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8})$

86 2). $\frac{3}{2}$

87 باستعمال العلاقتين: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

و $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

88 1). $(\vec{i}; \overrightarrow{oc}) = -\frac{\pi}{6}$ ملاحظة ترميز قيس الزاوية الموجهة $(\vec{i}; \overrightarrow{oc})$ بدل $(\vec{i}; \overrightarrow{oc})$.

2). $c\left(2; -\frac{\pi}{6}\right)$ $\leftarrow c(\sqrt{3}; -1)$ ،

3). $A(1; \sqrt{3})$ ، 4). $B(\sqrt{3} + 1; \sqrt{3} - 1)$

5). $OB = 2\sqrt{2}$ ، $(\vec{i}; \overrightarrow{oB}) = \frac{3\pi}{12}$ ،

$B\left(2\sqrt{2}; \frac{\pi}{12}\right)$ ، 6). $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

، $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

89 1). $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{2\pi}{3}$ ،

$x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right[$ ، 2). $S = \{\ \}$

3). $x = -\frac{\pi}{4}$ أو $x = -\frac{3\pi}{4}$ ،

$x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$ ، 4). $x = \frac{\pi}{4}$

$x \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

5). $x = \frac{\pi}{12}$ أو $x = \frac{7\pi}{12}$ ، $x \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}\right]$ ،

6). $x = \frac{13\pi}{24}$ أو $x = \frac{5\pi}{24}$ ،

$x \in \left[0; \frac{5\pi}{24}\right[\cup \left]\frac{13\pi}{24}; \pi\right]$

7). $x = \frac{13\pi}{30}$ أو $x = \frac{17\pi}{30}$ ،

$x \in \left[0; \frac{13\pi}{30}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{30}; \pi\right]$

90 2). $x_A = -\frac{\pi}{6}$ ، $x_B = -\frac{5\pi}{6}$

3). $x_C = \frac{\pi}{4}$ ، $x_D = \frac{3\pi}{4}$

4). $S = \left[-\pi;-\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

92 1). $S = \left\{\pi;\pm\frac{2\pi}{5};\pm\frac{4\pi}{5}\right\}$

2). $\sin 3x = -\sin 2x$ يكافئ

$\sin x.(4\cos^2 x - 1) = -2\sin x.\cos x$

يكافئ $\sin x.(4\cos^2 x - 1 + 2\cos x) = 0$

يكافئ $\sin x = 0$ أو $(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$

بوضع: y = cosx و حل معادلة من الدرجة 2

نجد: $S = \left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right\}$ ومنه: $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ و

$\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$

94 1). $A(2;0)$، $B(-\sqrt{2};\sqrt{2})$، $I\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) . OAB متساوي الساقين ، $(\vec{i};\overrightarrow{oI}) = \frac{3\pi}{8}$

3). $I\left(\sqrt{2-\sqrt{2}};\frac{3\pi}{8}\right)$

4). $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

95 1). $S_{OAM} = \frac{1}{2}\sin\alpha$ 2). $S_{\overset{\frown}{OAM}} = \frac{1}{2}\alpha$ ،

3). $S_{OAP} = \frac{1}{2}\tan\alpha$

4). من $S_{OAM} < S_{\overset{\frown}{OAM}} < S_{OAP}$ ينتج

$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$

96 1). $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{5}$ ، $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) = \frac{4\pi}{5}$ ،

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}) = \frac{6\pi}{5}$ ، $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}) = \frac{8\pi}{5}$.

4). موع مركز ثقل الخماسي ABCDE ينطبق على O .

5). من العلاقة الشعاعية:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE} = \vec{0}$ لأن O مركز ثقل الخماسي ABCDE .

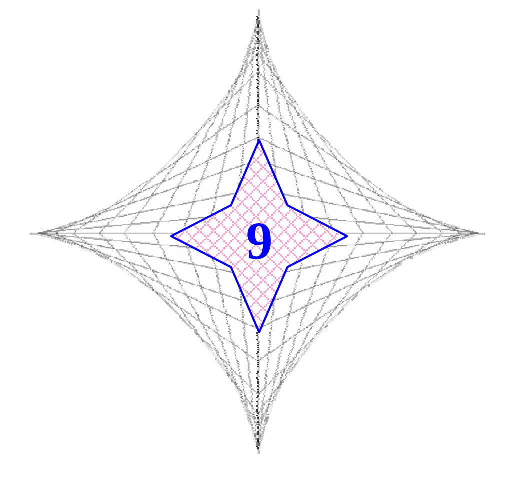
ينتج: $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5} = 0$

بما أن: $\frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5}$ ، $\frac{6\pi}{5} = 2\pi - \frac{4\pi}{5}$ إذن:

$1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$

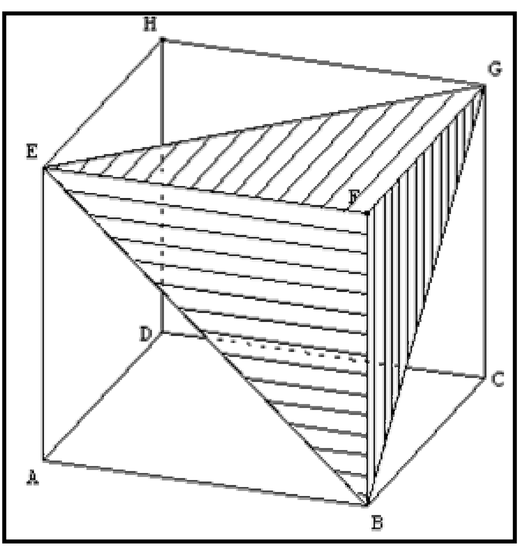
6). $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ بملاحظة أن:

إذن: $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$



المقاطع المستوية
الأشعة في الفضاء

الكفاءات المستهدفة



- إنشاء مقطع مكعب و رباعي وجوه بمستو .
- ممارسة الحساب الشعاعي في الفضاء .
- استعمال الأشعة لإثبات توازي شعاعين و استقامية ثلاث نقط.
- البرهان على أن أشعة من نفس المستوي

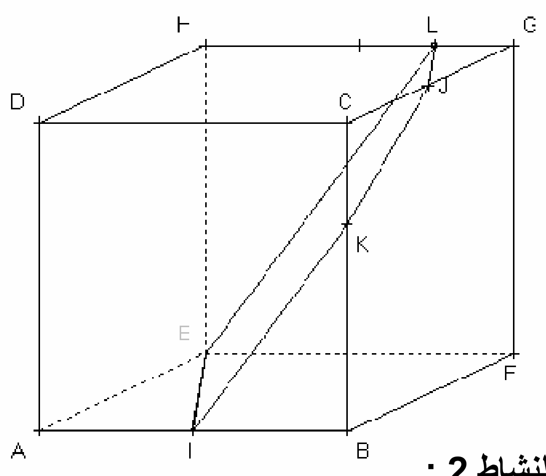
- ❖ ينقسم هذا الفصل إلى جزأين يتضمن الأول تعيين المقاطع المستوية لمكعب و لرباعي وجوه في الفضاء و هو خاص بشعبتي الرياضيات و تقني رياضي بينما يعالج الجزء الثاني الحساب الشعاعي في الفضاء.
- ❖ يتم في هذا الفصل تمديد خواص الحساب الشعاعي من المستوي إلى الفضاء كما يتم تعريف مفهوم الأشعة من نفس المستوي.
- ❖ يسمح هذا الفصل كذلك بإعادة استثمار نتائج الهندسة الفضائية المدروسة في السنة الأولى من خلال تعيين المقاطع المستوية لمكعب أو لرباعي وجوه.
- ❖ تعتبر المسائل المتنوعة المقترحة، والتي تتضمن التوازي، الارتباط الخطي و الاستقامية ...، فرصا سانحة لتوظيف البرهان الرياضي.

الأنشطة

النشاط 1 :

الهدف : تعيين مقطع مكعب بمستو.

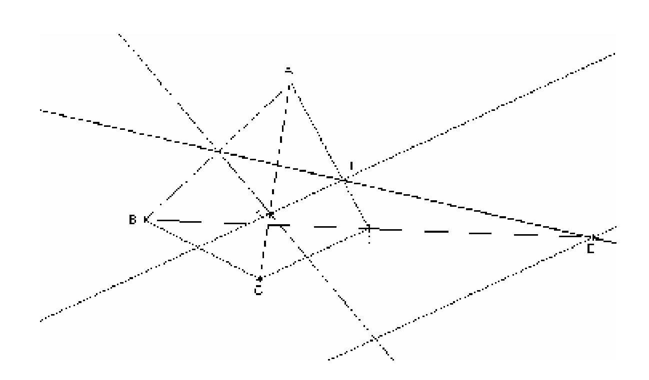
1) الوجهان $ABFE$ و $DCGH$ متوازيان
و بالتالي: $(LJ)//(EI)$
2) كذلك $(IK)//(EL)$
3) تقاطع المستوي مع الوجه $BCGF$ هي القطعة $[KJ]$
4) تقاطع المستوي مع المكعب هو الخماسي $IELJK$



النشاط 2 :

الهدف : تعيين مقطع رباعي وجوه بمستو.

تصحيح: E نظيرة B عوض النقطة F

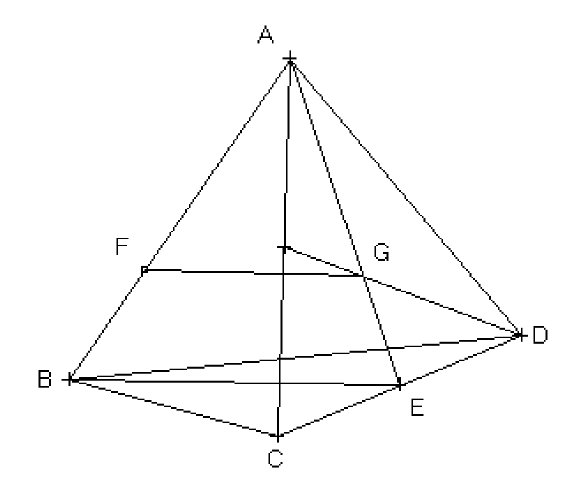


1) تقاطع (P) مع المستوي (ABD) هو القطعة $[IJ]$.
2) (CD) يوازي كلا من (P) و المستوي (BCD) و بالتالي فهو يوازي تقاطعهما.و لدينا كذلك E نقطة مشتركة بين المستويين.
3) النقطة I مشتركة بين المستويين (P) و (ABC).
4) أنظر الشكل.

النشاط 3 :

الهدف : إثبات أن مستقيمين من الفضاء متوازيان.

1)

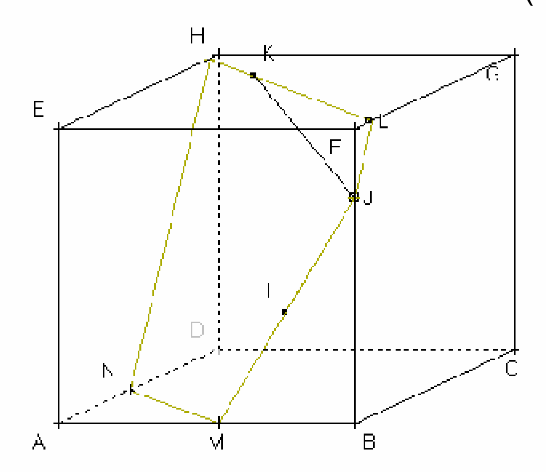


2) $\overrightarrow{FA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$
3) $x=\frac{3}{2}$
4) $(BE)//(FG)$

النشاط 4:

الهدف: إثبات أن ثلاث أشعة من نفس المستوي.

1)



2) $\overrightarrow{LJ}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$

النشاط 5:

الهدف: إنجاز برهان لخاصية.

1) لدينا: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'I}$ و باستعمال علاقات مماثلة وعلما أن $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{G'I}+\overrightarrow{G'J}+\overrightarrow{G'K}+\overrightarrow{G'L}=\vec{0}$ و بعد الجمع نتحصل على المطلوب.
2) بديهي.
3) تبين أن: $\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{BG_2}+\overrightarrow{CG_3}+\overrightarrow{DG_4}=\vec{0}$

الأعمال الموجهة

مبرهنة منلاوس

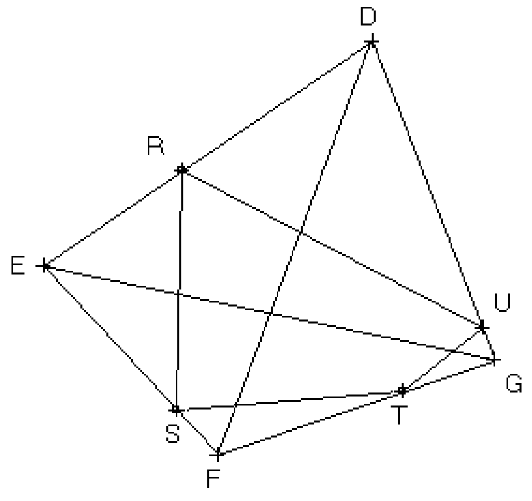
الهدف: إنجاز برهانا للمبرهنة

1) بتطبيق مبرهنة طالس في وضعيتين مختلفتين نتحصل على النتيجتين المطلوبتين.

لدينا $MA = \frac{NA}{NC} \times QC$ و $\frac{1}{MB} = \frac{PC}{PB} \times \frac{1}{QC}$

و منه النتيجة.

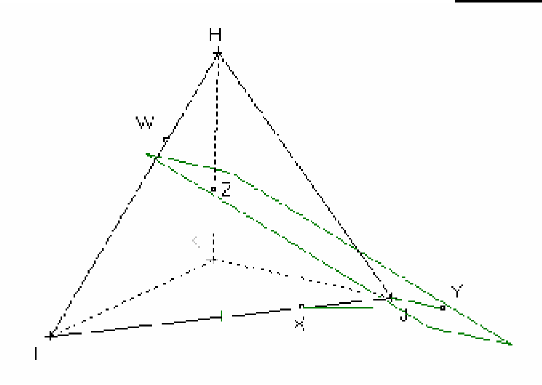
2)



المستقيمان (UT) و (DF) يتقاطعان في النقطة V.

بتطبيق النتيجة السابقة على المثلثين DEF و DGF نتحصل على المطلوب.

التطبيق:



لدينا $\frac{WH}{WI} \times \frac{XI}{XJ} \times \frac{YJ}{YK} \times \frac{ZK}{ZH} \neq 1$ و منه فالنقط لا تنتمي إلى نفس المستوي.

المرجح و الاستقامية

الهدف: إثبات استقامية ثلاث نقط باستعمال المرجح.

المثال: من $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ نجد مثلا:

$3\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GD}$ و $4\overrightarrow{GE} = 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

بالجمع و علما أن $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

نتحصل على العلاقة: $4\overrightarrow{GE} + 3\overrightarrow{GF} = \vec{0}$.

الحالة الخاصة:

من العلاقة $\overrightarrow{BE} = k\,\overrightarrow{BC}$ نستنتج أن:

$(1-k)\overrightarrow{EB} + k\,\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

و من العلاقة $\overrightarrow{AF} = k\,\overrightarrow{AD}$ نستنتج أن:

$(1-k)\overrightarrow{FA} + k\,\overrightarrow{FD} = \vec{0}$

لدينا: $(1-k)\overrightarrow{HA} + k\,\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HF}$

و $(1-k)\overrightarrow{HB} + k\,\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HE}$ و علما

أن: $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HF} = \vec{0}$ نجد المطلوب.

نثبت بكل سهولة أن: $(1-k)\overrightarrow{HI} + k\,\overrightarrow{HJ} = \vec{0}$ و بالتالي فالنقطة في استقامية.

تـــمـــاريـــن

1 1) خاطئ . 2) صحيح . 3) خاطئ.

2 1) خاطئ . 2) خاطئ . 3) صحيح .

3 1) خاطئ . 2) صحيح . 3) خاطئ.

4 الإجابة 2 هي الصحيحة

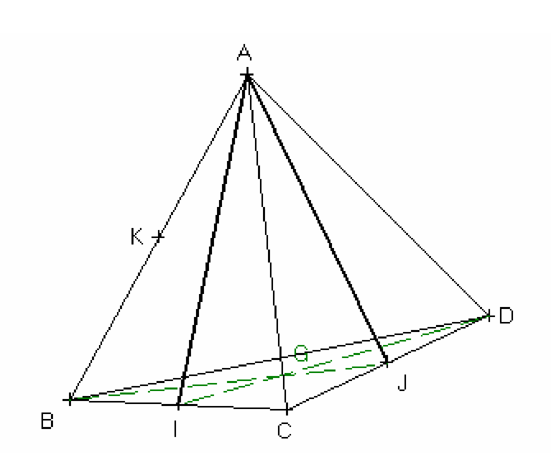
5 هذا التمرين خاص بالفصل العاشر(الإجابة الثالثة)

6 هذا التمرين خاص بالفصل العاشر(الإجابة الثانية)

7 تقاطع المستويين (AID) و (ABJ) هو المستقيم (AG) حيث G مركز ثقل المثلث BCD.

تقاطع المستويين (ADI) و (CDK) هو المستقيم (AG') حيث G' مركز ثقل ABC.

تقاطع المستويين (CDK) و (ABJ) هو المستقيم (KJ)



8 المستويان (SAB) و (SCD) يتقاطعان وفق المستقيم الذي يشمل النقطة S و يوازي (AB).
المستويان (SAC) و (SBD) يتقاطعان وفق المستقيم (SO) حيث O مركز $ABCD$. .

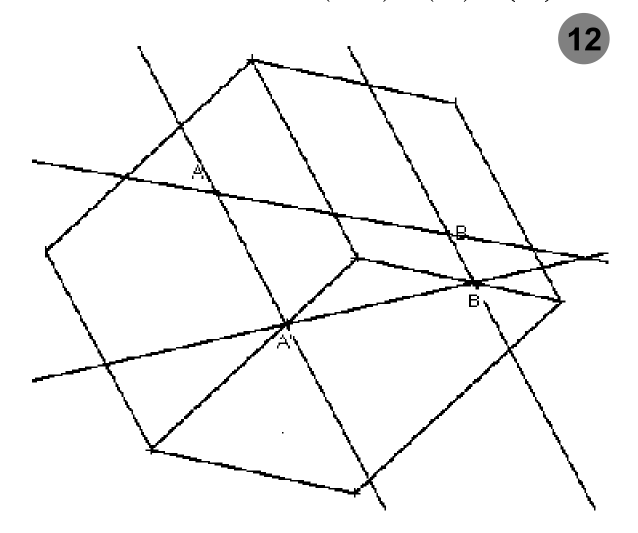
9 $(S,D)\cap(S,D')=(OS)$.

10 المستويان (SAD) و (SBC) يتقاطعان وفق المستقيم (SO) حيث: $(BC)\cap(AD)=\{O\}$.
المستويان (SAB) و (SCD) يتقاطعان وفق المستقيم الذي يشمل النقطة S و يوازي (AD).

11

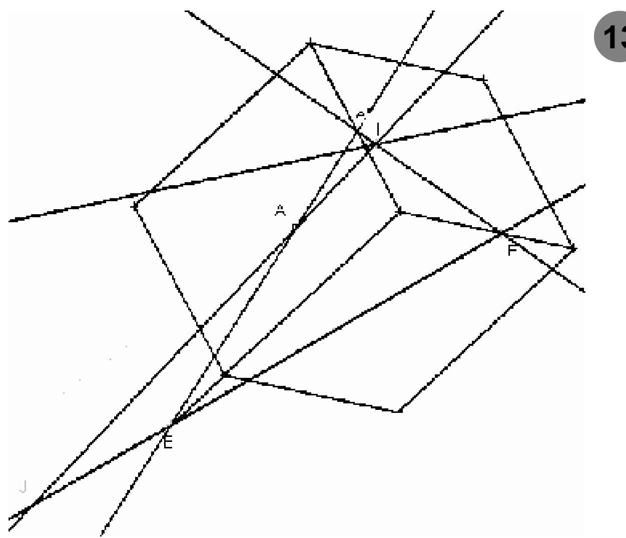
$(A,(D))\cap(P)=(AE)$،
$(A,(D))\cap(Q)=(EF)$
$(A,(D))\cap(R)=(FG)$.
حيث $(AE)\cap(R)=\{G\}$

12



تقاطع المستوي (R) مع المستقيم (AB) هي النقطة I.

13

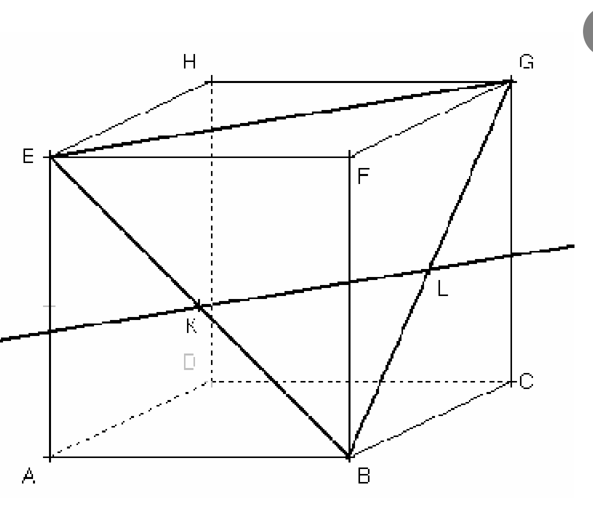


لتكن I و J نقطتي تقاطع (Δ) مع (D) و (D') على الترتيب.لتكن E و F نقطتي تقاطع (D') مع (P) و (Q) على الترتيب. المستوي $(A,(D'))$ يقطع (P) و (Q) في نقطة A' نقطة تقاطع المستقيم (EA) مع المستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q). النقطة I هي إذن تقاطع المستقيمين (FA') مع (D).أما النقطة J فهي تقاطع المستقيمين (FE) و (AI).

<u>**عكسيا:**</u>.....

14 المستقيم الذي يشمل A و يوازي (D) يقطع (R) في نقطة A'. المستقيم الذي يشمل النقطة B و يوازي (D) يقطع (R) في نقطة B'. التقاطع المطلوب هو إذن المستقيم $(A'B')$. تقاطع (AB) مع المستوي (R) هي النقطة I تقاطع المستقيمين (AB) و $(A'B')$.

15

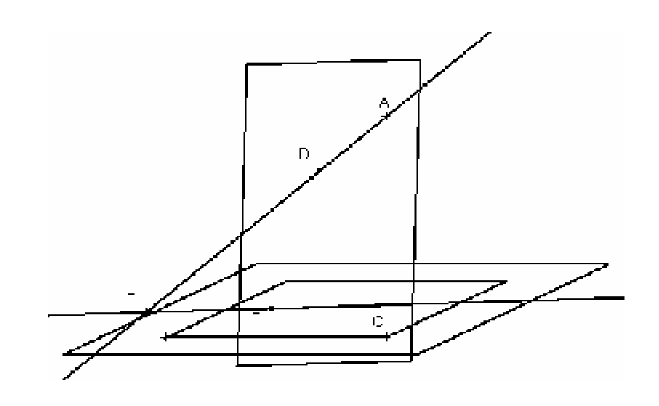


تقاطع المستوي (P) مع المستوي (EBG) هو المستقيم (KL).

16 في حالة عدم توازي (IJ) و (AB) فإن المستقيم الذي يشمل S و يوازي (AB) يقطع (IJ) في E.
المستويان (SAB) و (SDC) يتقاطعان وفق (SE).
(IJ) و (KE) يقطعان (SA)، (SB)، (SC) و (SD) في أربع نقط ثابتة F_1، F_2، F_3 و F_4 على الترتيب. تقاطع (IJK) مع المستويات (SAB)، (SBC)، (SAD) و (SDC) هي على الترتيب المستقيمات (F_1F_2)، (F_2F_3)، (F_3F_4) و (F_1F_4).
ملاحظة: يمكن دراسة حالة التوازي.

17 **تصحيح:** A و B من (D). **:** A' و B' من (D').
المستقيمان (D) و (D') يعينان مستويا فهو يحوي إذن المستقيمين (AA') و (BB') فهما إذن إما متقاطعان و إما متوازيان.

18 نستعمل البرهان بالخلف: المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P). إذن لو كانت A، B و C في استقامية لكانت A نقطة من (P) و هذا تناقض.
بما أنها ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستويا.



19 (MN) محتوى في المستوي (ABC). المستويان (ABC) و (BCD) يتقاطعان وفق (BC) و بالتالي فالمستقيم (MN) يقطع (BCD) في نقطة P' من المستقيم (BC).
ننجز برهانا مماثلا بالنسبة لكل من M' و N'.

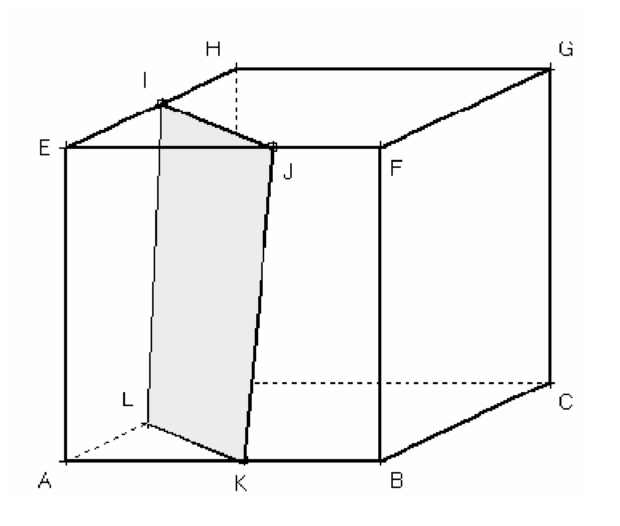
20 **الحالة1:** $(D)//(D')$
المستقيمات التي تقطع (D)، (D') و (Δ) معا هي المستقيمات من المستوي (P) التي تشمل I و تقطع (D).

الحالة2: (D) و (D') غير متوازيين
المستقيمات التي تقطع (D)، (D') و (Δ) معا هي المستقيمات من المستوي (P) و التي تشمل I.

21 يكفي أن لا تنتمي النقطة A إلى المستوي المحدد بالمستقيمين (D) و (D') و في هذه الحالة تقاطع المستويين $(A,(D))$ و $(A,(D'))$ هو المستقيم (OA).

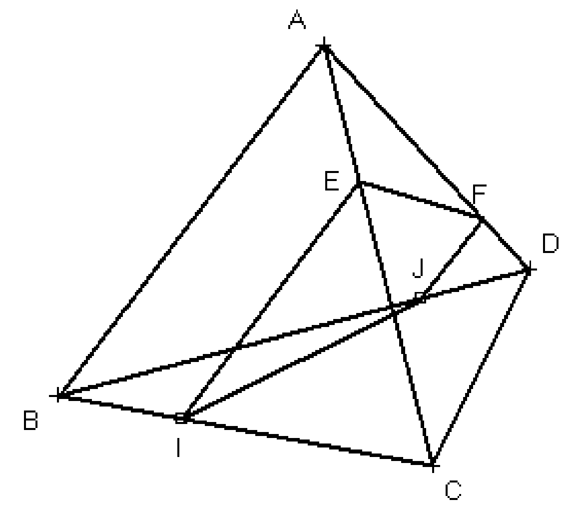
22 المستوي المعين بـ (D) و A هو المستوي (P).
إذا كان المستقيمان (D) و (AB) من نفس المستوي تنتمي عندئذ النقطة B إلى المستوي (P) و هذا تناقض.

26 (IJ) يوازي (KL) و (JK) يوازي (IL)
المقطع هو المستطيل $IJKL$



27

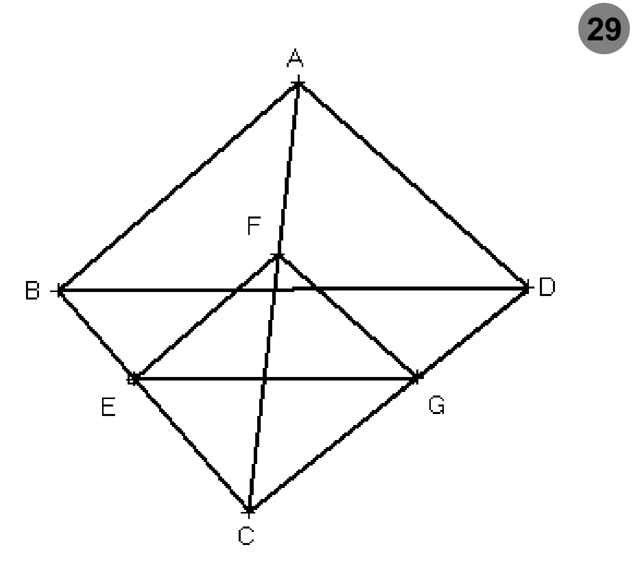
28



المستوي (P) يقطع الوجه ABC وفق قطعة توازي (AB) أي $[IE]$ و يقطع الوجه ABD وفق قطعة توازي (AB) أي $[JF]$

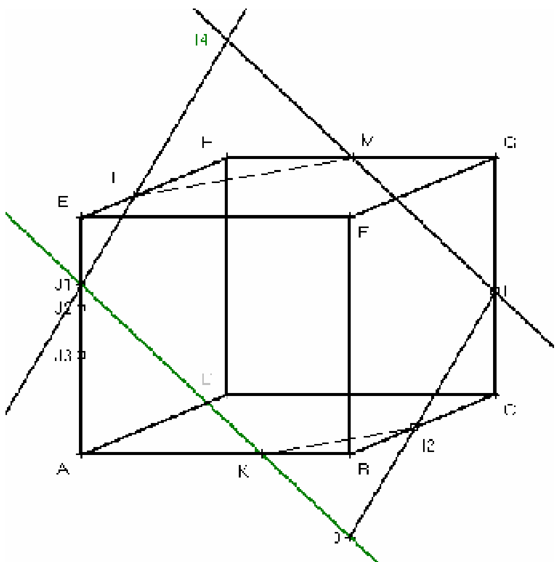
المقطع هو الرباعي $IJFE$.

29



المقطع هو الثلث EFG.

30 المستقيم (FB) هو تقاطع المستويين $(ABFE)$ و $(BCGF)$ الذي يشمل (I_1I_2) و بالتالي فإن تقاطع $(ABFE)$ مع (I_1I_2) هو تقاطع (FB) مع (I_1I_2). نسمي I_3 نقطة التقاطع. بما أن $(ABFE)//(DCGH)$ ننشئ من I_1 المستقيم الموازي لـ (I_1I_3) و لتكن I_4 نقطة تقاطعه مع المستقيم (DH). المقطع هو إذن السداسي $J_1KI_2I_1ML$.



ملاحظة: التمارين من 31 إلى 50 خاصة بالفصل العاشر.

31 **تصحيح:** (D,A,C,H) عوض (A,C,F,G) و (D,A,B,H) عوض (E,F,C,K).

32 (A,C,F,G)معلم متعامد فقط.

(A,C,D,F) ليس معلما.

(E,F,C,K) معلم لا متعامد و لا متجانس.

33 $(AB)\perp(AD)$ ،$(AB)\perp(AE)$ و $(AE)\perp(AD)$ و $AB=AD=AE$.

$A(0,0,0)$ ،$B(1,0,0)$ ،$C(1,1,0)$ ،$G(1,1,1)$.

34 نفس اعتبارات التمرين السابق.

35 نفس اعتبارات التمرين السابق.

36 $AB=\sqrt{3}$

37 تطبيق مبرهنة فيتاغورث

38 $m\in\{-2,4\}$

39 $AB=\sqrt{14}$ ،$AC=\sqrt{14}$ ،$BC=3\sqrt{2}$

لدينا: $AB=AC$. المثلث ABC متساوي الساقين.

40 ندرس كل الحالات $AB=AC$ ،$AB=BC$ ، ...

ندرس الحالة: $\begin{cases}AB=AC\\AB=BC\end{cases}$

41 تنتمي النقطة $A\left(1,1,2\right)$ إلى كل من المستويات التي معادلاتها $x=1$ ، $y=1$ و $z=2$.
تنتمي النقط إلى الدائرة التي مركزها النقطة $H\left(3,4,2\right)$ و نصف قطرها $\sqrt{13}$.

42 $MA^{2}=MB^{2}$.

43 نفس المنهجية السابقة

44 $OM^{2}=OA^{2}$ و منه: $x^{2}+y^{2}+z^{2}-38=0$

45 المسافة بين النقطة O و المستوي $\left(P\right)$ هي 2 بينما نصف قطر سطح الكرة هو $OA=3$. إذن سطح الكرة يقطع المستوي وفق دائرة معادلتها $\begin{cases}x^{2}+y^{2}=5\\ z=-2\end{cases}$

46 $x^{2}+y^{2}=9$

47 $y^{2}+z^{2}=5x^{2}$

48 نفس منهجية التمرين السابق.

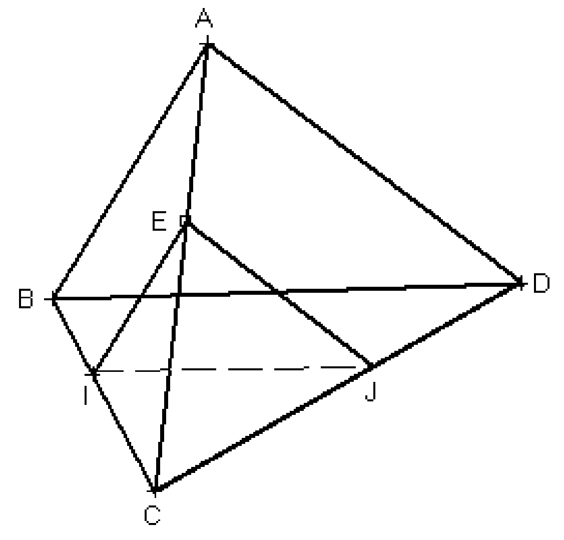
49 $EB=EG=BG$ لأنها أقطار لوجوه نفس المكعب. المثلث EBG متقايس الأضلاع.

50

المستويات $\left(ADH\right)$ ، $\left(BAH\right)$ و $\left(ACH\right)$ تتقاطع وفق $\left(AH\right)$. $\left(AH\right)$ عمودي على المستوي $\left(BCD\right)$ فهو إذن عمودي على $\left(BC\right)$ و منه $\left(DH\right)\perp\left(BC\right)$. و بطريقة مماثلة نثبت أن: $\left(DC\right)\perp\left(BH\right)$ و $\left(CH\right)\perp\left(BD\right)$. نستنتج هكذا أن الارتفاعات $\left(DH\right)$ ، $\left(BH\right)$ و $\left(CH\right)$ تتلاقى في النقطة H .

51

<u>**تصحيح:**</u> عوض $\left[CD\right]$ نأخذ $\left[AD\right]$.



مقطع رباعي الوجوه بالمستوي الذي يشمل النقطة E و يوازي $\left(AB\right)$ و $\left(AD\right)$ هو المثلث EIJ .

52

- المستوي $\left(ABC\right)$ يقطع المستوي $\left(P\right)$ وفق مستقيم و بالتالي فإن نقط تقاطع المستقيمات $\left(AB\right)$ ، $\left(AC\right)$ و $\left(BC\right)$ مع المستوي $\left(P\right)$ أي A' ، B' و C' تنتمي إلى مستقيم التقاطع فهي إذن في استقامية.
- النقط M ، A و B تعين مستويا يقطع المستوي $\left(P\right)$ وفق مستقيم و بالتالي يقطع المستقيمان $\left(MA\right)$ و $\left(MB\right)$ المستوي $\left(P\right)$ في نقطتين A_1 و B_1 على الترتيب.

كذلك المستوي $\left(CAM\right)$ بقطع المستوي $\left(P\right)$ وفق مستقيم فنحصل على نقطتين A_1 و C_1.
المستوي $\left(AMB\right)$ يقطع $\left(P\right)$ وفق مستقيم يشمل النقطة C' لأن $\left(AB\right)$ محتوى في $\left(AMB\right)$ فهو يقطع $\left(P\right)$ في C'. إذن $\left(A_1B_1\right)$ يمر من النقطة C'.
بطريقة مماثلة نثبت أن $\left(B_1C_1\right)$ يمر من النقطة A' و $\left(A_1C_1\right)$ يمر من النقطة B' .

10

التعليم في الفضاء

الكفاءات المستهدفة



- تعليم نقط أعطيت إحداثياتها.
- تعيين معادلة لمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات.
- تعيين معادلات مستقيم معرف بنقطة و شعاع توجيه له.
- إثبات أن أشعة معطاة تنتمي إلى نفس المستوي.
- استعمال مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة بين نقطتين.
- استعمال دستور المسافة بين نقطتين لتعيين مجموعة نقط تحقق خاصية ما.

يشمل هذا الفصل ثلاثة محاور أساسية هي:

- تعليم النقط في الفضاء من خلال إدراج مفهوم المعلم.
- استعمال الإحداثيات لحل مسائل مرتبطة بالاستقامية، التوازي، الأشعة من نفس المستوي...
- تعيين المعادلة الديكارتية لكل من سطح الكرة، المخروط الدوراني، الاسطوانة الدورانية، المستوي الموازي لأحد مستويات الإحداثيات...

الأنشطة

النشاط 1 :

الهدف : تعيين إحداثيات نقط في معلم للفضاء

1) لدينا $A\,(0,0,0)$، $B\,(3,0,0)$، $C\,(3,0,2)$، $D\,(0,0,2)$، $E\,(0,4,0)$، $F\,(3,4,0)$، $H\,(0,4,2)$

2) $I\,(1,0,0)$، $J\,(0,1,0)$، $K\,(0,0,1)$. النقطة A هي مبدأ المعلم.

3) $L\,(3,2,2)$ و $M\,(2,4,2)$.

النشاط 2 :

الهدف : تعيين معادلات مستويات و مستقيمات.

1) $A\,(0,0,0)$، $B\,(1,0,0)$، $C\,(0,1,0)$، $D\,(0,0,1)$، $F\,(1,1,0)$، $G\,(1,0,1)$، $E\,(0,1,1)$ و $H\,(1,1,1)$.

2) المستوي $(GDE): z=1$، x و y كيفيان.

المستوي $(ABC): z=0$، x و y كيفيان.

المستوي $(EHF): y=1$، x و z كيفيان.

المستقيم $(AB): y=0$ و $z=0$، x كيفي.

المستقيم $(AC): x=0$ و $z=0$، y كيفي.

المستقيم $(HE): y=1$ و $z=1$، x كيفي.

3) إحداثيات منتصف $[AB]$ هي $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$.

إحداثيات منتصف $[CE]$ هي $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

النشاط 3 :

الهدف : تعيين المسافة بين نقطتين.

1) $A\,(0,0,0)$، $B\,(3,0,0)$، $C\,(3,4,0)$، $D\,(0,4,0)$، $E\,(0,0,2)$، $F\,(3,0,2)$، $G\,(3,4,2)$ و $H\,(0,4,2)$.

2) بتطبيق مبرهنة فيثاغورث في المثلث ACG و علما أن $CG=AE$ يكون لدينا: $AG^2=AC^2+AE^2$.
بتطبيق نفس المبرهنة في المثلث ABC و علما أن $BC=AD$ يكون لدينا: $AC^2=AB^2+AD^2$. من العلاقتين السابقتين نستنتج المطلوب.

3) $AG^2=29$ و منه $AG=\sqrt{29}$

4) $\sqrt{(x_G-x_A)^2+...}=\sqrt{29}=AG$

5) باستعمال من جهة النتيجة السابقة و باستعمال العلاقة $MN=\frac{1}{2}EG$ في المثلث EHG من جهة ثانية نجد:
$MN=5/2$

النشاط 4 :

الهدف : دراسة تقاطع مخروط دوراني مع مستو.

تصحيح: $x=\frac{3}{4}\sqrt{z^2-\frac{16}{9}b^2}$

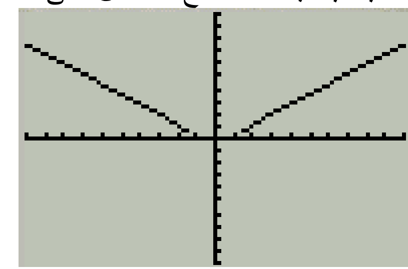
1) • (Σ) دائرة مركزها النقطة C و نصف قطرها R.

• بتطبيق مبرهنة طالس نجد: $R=\frac{3}{4}c$ و منه معادلة (Σ) هي: $x^2+y^2=\frac{9}{16}c^2$.

• المستوي (P) يولد المخروط الدوراني لما تتغير c في المجال $[0,4]$ و منه المعادلة.

2) • معادلة المستوي (Q) هي: $y=b$.

• بكتابة جملة التقاطع نتحصل على المطلوب.



الأعمال الموجهة

الهدف من الأعمال الموجهة الخاصة بهذا الفصل هو تعيين المعادلات الديكارتية لبعض المجموعات المنصوص عليها في البرنامج و بالتالي فكل النتائج الأساسية الخاصة بهذه المعادلات قد أعطيت و لا نرى أي داع لإعادة كتابتها.

تمـــاريـــن

1 1) خطأ. 2) صحيح . 3) خطأ.

2 1) خطأ . 2) خطأ. 3) خطأ.

3 1) صحيح. 2) خطأ. 3) خطأ.

4 1) خطأ. 2) صحيح . 3) خطأ.

5 1) خطأ. 2) صحيح . 3) خطأ

6 1) خطأ . 2) خطأ. 3) صحيح.

7 خطأ

8 الجواب جـ)

9 الجواب ب)

10 الجواب جـ)

11 الجواب ب)

12 الجواب ب)

13 الجواب ب)

14 الجواب جـ)

15 $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{GL}=\overrightarrow{CE}$ ، $\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{DG}$

19 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{LF}$

25 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$

29 $\overrightarrow{EG}=3\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DI}$ و منه فالأشعة من نفس المستوي

30 الأشعة $\overrightarrow{SA}$، $\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SD}$ ليست من نفس المستوي
الأشعة $\overrightarrow{SA}$، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{SD}$ ليست من نفس المستوي
لدينا $\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{CD}$ و منه فالأشعة $\overrightarrow{SA}$، $\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{CD}$ من نفس المستوي.

32 $\overrightarrow{AE}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

33 ب) $\vec{u}=5\vec{w}-3\vec{v}$

36 $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ إذن الأشعة من نفس المستوي.

37 هل يوجد α و β بحيث: $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

42 ثم باستعمال علاقة $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\\ \overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}\end{cases}$ شال نتوصل إلى النتيجة.

47 $\vec{v}=2\vec{u}$

51 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$. النقط في استقامية.

54 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ مع $k=1$ و منه $(AB)//(CD)$.

63 $D(8,-4,6)$

66 $G\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

69 $\vec{u}=\vec{0}$ و منه النقط من نفس المستوي.

73

$\begin{cases}x=2k+2\\ y=3k-1\\ z=-k+1\end{cases}$ ، $\begin{cases}3x-2y-8=0\\ y-3z+2=0\end{cases}$

78 نقطة التقاطع هي $(2,1,3)$

79

بوضع مثلا $z=k$ يكون لدينا $\begin{cases}x=2+k\\ y=1-k\\ z=k\end{cases}$ و
بالتالي فالنقطة هي $(2,1,0)$ و الشعاع وهو $(1,-1,1)$

83 $x^2+y^2+z^2=9$

84 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ x-y=1\\ z=2\end{cases}$ نتحصل مثلا على المعادلة
ذات المجهول x: $x^2-x-2=0$.

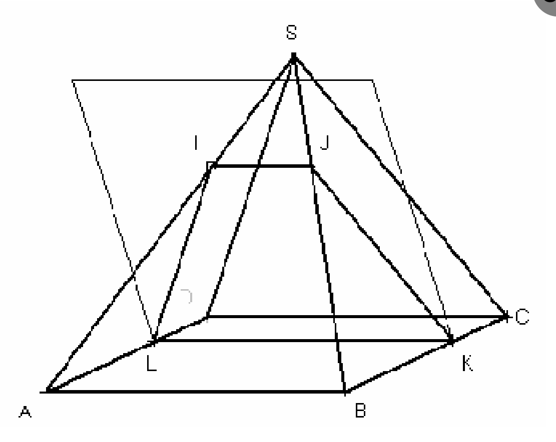
86
تقاطع سطح الكرة مع المستوي هي الدائرة التي مركزها $(3,0,0)$ و نصف قطرها 4 و هي معرفة بالجملة: $\begin{cases}y^2+z^2=16\\ x=3\end{cases}$

88

$\overrightarrow{IK}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{FJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

ينتج أن $\overrightarrow{IK}$ و $\overrightarrow{FJ}$ من نفس المستوي.

89



90 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AE}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. إذن الأشعة من نفس المستوي.

92 $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$ و منه الشعاعان متوازيان.

93 $\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ و منه $(IJ)//(ABC)$

94 $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ و بالتالي فالأشعة من نفس المستوي.

95 $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

96 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$

97 لا توجد نقطة M تحقق الشرط لأن الشعاع مستقل عن النقطة M.

98 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و منه $(EF)//(BC)$

99 ا) $\vec{u}=2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right)$

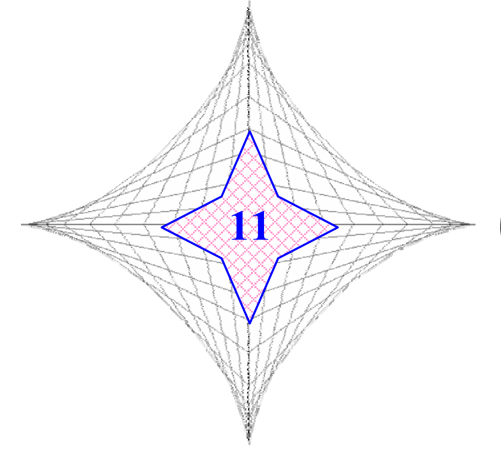
ب) النقطة I هي منتصف القطعة $[EF]$

100 التقاطع هي النقطة $(2,1,3)$

103 $\begin{cases}x^2+z^2-\frac{1}{4}y^2=0\\0\leq y\leq 6\end{cases}$ أو ...

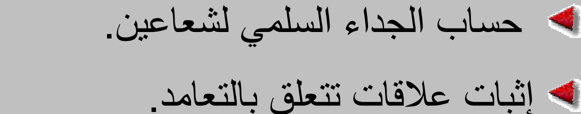
104 $\begin{cases}y^2+z^2=9\\2\leq x\leq 5\end{cases}$

في حالة سطح غير منته تكتب المعادلة على الشكل: $y^2+z^2=9$.

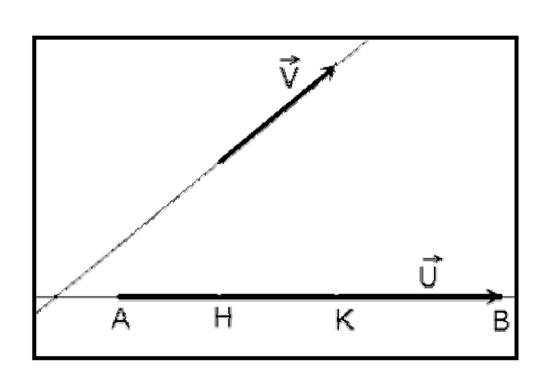


الجداء السلمي في المستوي

الكفاءات المستهدفة



- حساب الجداء السلمي لشعاعين.
- إثبات علاقات تتعلق بالتعامد.
- كتابة معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه.
- تعيين معادلة دائرة.
- حساب مسافات و أقياس زوايا.



$$\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}$$

- ❖ يعالج هذا الموضوع أحد أهم مواضيع الهندسة المستوية في السنة الثانية من التعليم الثانوي و المتمثل في الجداء السلمي نظرا لتعدد و تنوع تطبيقاته.
- ❖ يعرف، النشاط الأول، التلميذ بمختلف عبارات الجداء السلمي و التي تتمثل أهميتها و نجاعتها في حل المشكلات.
- ❖ من بين تطبيقات الجداء السلمي يعالج هذا الفصل وضعيات متنوعة متعلقة بالتعامد من خلال تعيين: معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له،معادلة دائرة و مماس لها، العلاقات المترية في مثلث ...
- ❖ يبقى الهدف الأساسي من هذا الفصل هو منح التلميذ وسائل تسمح له بمعالجة مشكلات مرتبطة بحساب أطوال و زوايا أو بتعيين محال هندسية ...

الأنشطة

النشاط 1 :

الهدف : تقديم مختلف عبارات الجداء السلمي.
ملاحظة: لا توجد أية صعوبة تذكر فيما يتعلق بإنجاز مختلف البراهين المطلوبة.

النشاط 2 :

الهدف : تعيين قيمة مقربة لزاوية.
1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. $BC=\sqrt{21}$
2) لحساب $\cos\widehat{ABC}$ نستعمل العلاقة:
$$AC^2=BC^2+BA^2-2BC\times BA\times\cos\widehat{ABC}$$
ثم باستعمال آلة حاسبة نعين قيمة مقربة
3) يمكن استعمال مجموع زوايا مثلث.

النشاط 3 :

الهدف : حساب $\cos\frac{\pi}{12}$
1) قيس الزاوية هو $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$
لدينا: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA\times OB\cos\frac{\pi}{12}$ مع $OA=OB=1$
2) $\overrightarrow{OA}\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$ و $\overrightarrow{OB}\left(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6}\right)$
$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
3) $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

النشاط 4 :

الهدف : حساب $\sin 2a$ بدلالة $\sin a$ و $\cos a$.
1) $S=\frac{1}{2}AH\times BC$ مع $BH=\frac{1}{2}BC$ و منه المطلوب. لدينا من جهة ثانية: $AH=\alpha\cos a$
و $BH=\alpha\sin a$ و منه النتيجة المطلوبة.
2) لدينا: $S=\frac{1}{2}CK\times AB$ مع $CK=\alpha\sin 2a$ و منه
$$S=\frac{1}{2}\alpha^2\sin 2a$$
3) نستنتج مما سبق أن: $\sin 2a=2\sin a\cos a$

الأعمال الموجهة

المسافة بين نقطة و مستقيم:
الهدف : حساب المسافة بين نقطة و مستقيم معرف بمعادلة
1) $\vec{n}(a,b)$. $\left|\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{AH}\right)\right|=1$
الإجابة على السؤالين 2 و 3 مباشرة.
التطبيقات:
- $2\frac{\sqrt{5}}{5}$ • نصف قطر الدائرة هو المسافة بين Ω و (D)
- نحسب المسافة بين مركز الدائرة و (D') و نقارنها مع نصف قطر الدائرة.

دساتير الجمع:
الهدف: تعيين مختلف دساتير الجمع
$\overrightarrow{OA}(\cos a,\sin a)$ ، $\overrightarrow{OB}(\cos b,\sin b)$
التطبيق1: $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$
التطبيق2: $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$

تمـــاريـــن

1 خاطئ . 2 خاطئ 3 خاطئ
4 خاطئ 5 صحيح 6 خاطئ
7 صحيح 8 صحيح 9 خاطئ
10 خاطئ 11 صحيح 12 صحيح
13 خاطئ 14 صحيح 15 خاطئ
16 صحيح 17 خاطئ

18 $-\frac{1}{2}$ 19 1 20 $\sqrt{3}$
21 8 22 $\|\vec{u}\|=1$
23 $(\vec{u}-\vec{v})\perp(\vec{u}+\vec{v})$
24 $\vec{u}\perp\vec{v}$
25 $-2x+3y-1=0$
26 الدائرة التي قطرها $[AB]$

27 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=8$ ، $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-8$
$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}=4$ ، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}=-16$

28
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40$ ، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}=-12$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-72$
$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD}=-36$ ، $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OI}=-6$ ، $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{DB}=-36$.

29 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=36$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0$
$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}=0$ ، $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BI}=-18$.

30 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=18$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=-18\sqrt{2}$
$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=27\left(\sqrt{3}+1\right)$

<u>**تصحيح:**</u> يطلب حساب $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$.
2) يتم حساب DH باستخدام العلاقة:
$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=DC\times DH$
3) لدينا: $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=-CD\times CH$ علما أن:
$CH=DH-CD$
$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=CD\times CB\times\cos\widehat{DCB}$.

31 1) $AC=\sqrt{34}$ ، $DE=\dfrac{\sqrt{61}}{2}$
2) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}=\dfrac{7}{2}$.
3) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}=AC\times DE\times\cos\theta$

32 1) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=8$ ، $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}=0$
2) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA\times CI$ و منه $CI=\dfrac{8}{3}$.

33 <u>**تصحيح:**</u>هل المثلث قائم في A؟
المثلث ليس قائما في A لأن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\neq 0$..

34 1) نبين أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ انطلاقا من
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4$
2) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=5$

35 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=16$
2) $AP=2\sqrt{2}$

36 $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{25}{2}$

38 1) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=AB^2$
2) نبين أن $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AN}=0$

41 $\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right)^2=70$

54 $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA}=36$ ، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}=8\sqrt{3}$ ،
$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}=-8\sqrt{3}$.

58 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=16$

59 $ABCD$ متوازي أضلاع. بوضع $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$
و $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ يكون $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$ و $\overrightarrow{BD}=\vec{u}-\vec{v}$

60 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$ ، $AB^2+AC^2=68$
$AB^2-AC^2=36$ ، $AB=\sqrt{104}$ ،
$AC=\sqrt{42}$.

62 $M\left(-1,0\right)$ ، $N\left(0,-1\right)$

63 $A\left(0,0\right)$ ، $B\left(0,4\right)$ ، $C\left(4,4\right)$ ، $D\left(0,4\right)$

65 1) $2x+3y-1=0$
2) $y=\dfrac{3}{2}x$

66 $\overrightarrow{n_1}\left(2,-1\right)$ ، $\overrightarrow{n_2}\left(1,2\right)$
$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ و منه $D_1\perp D_2$

67 1) $x-4y-13=0$
2) $4x-5y-13=0$

68 مجموعة النقط هي المستقيم العمودي على المستقيم $\left(AB\right)$ في النقطة A.
$2x-y+3=0$

69 $x^2+y^2+x-2y-6=0$
$5x+2y-10=0$

70 1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$
2) $x^2+y^2+2x+y-\dfrac{255}{4}=0$

71 1) $\overrightarrow{AH}$ شعاع ناظمي للمستقيم $\left(D\right)$.
2) $H\left(3,2\right)$
3) $AH=\sqrt{2}$

72 $\vec{n}\left(4,6\right)$ ، $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=26$

73 1) $\left(\Delta\right):3x-4y+18=0$
2) $H\left(-2,3\right)$ نقطة التقاطع.
3) $d\left(H,D\right)=\dfrac{5}{2}$

74

1) $d(A,D)=\sqrt{10}$

2) $(x-3)^2+(y+2)^2=10$

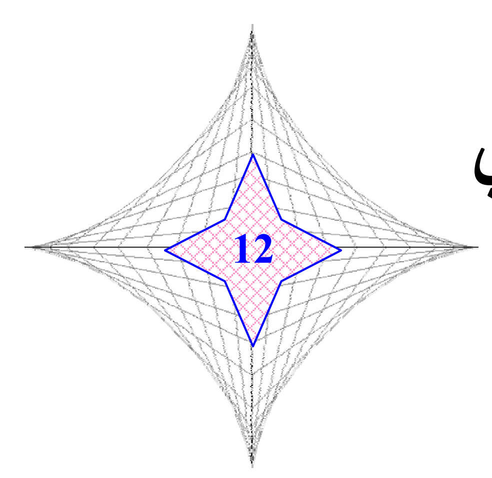
75

1) $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

2) $(x-2)^2+(y-3)^2=8$

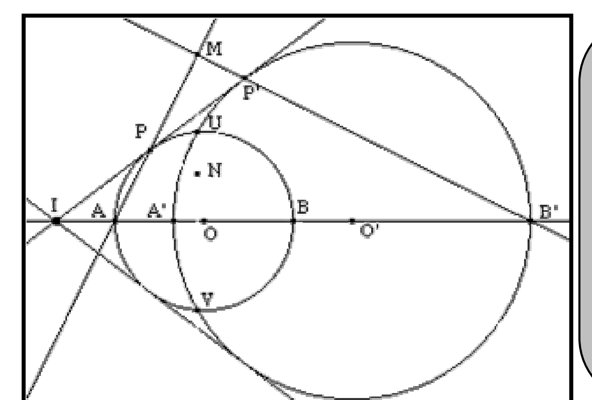
3) $(x-3)^2+y^2=8$

76 (E) دائرة مركزها $(5,-2)$ و نصف قطرها $\sqrt{6}$.



التحويلات النقطية في المستوي التحاكي

الكفاءات المستهدفة



- استعمال خواص التحاكي لإثبات استقامية نقط.
- توظيف التحويلات النقطية في حل مسائل هندسية.
- تعيين محل هندسي.
- حل مسائل حول الإنشاءات الهندسية.

يهدف هذا الفصل إلى تمكين المتعلم من التحكم في :

- **ترجمة تعريف التحاكي إلى العلاقة الشعاعية و العكس .**
- **ملاحظة العلاقة بين مرجح نقطتين حيث أن إحداهما صورة الأخرى بتحاك مركزه المرجح يطلب تحديد نسبته .**
- **استعمال التحاكي لإثبات الإستقامية ، التوازي ، التقاطع لعدة مستقيمات في نقطة . . .**
- **استعمال برمجيات الهندسة الديناميكية لوضع تخمينات و تأكيدها بالبرهان النظري .**

ملاحظة : تعطى التحويلات الأخرى (دوران ، انسحاب ، تناظر) من خلال تمارين متنوعة وتستخدم هذه التحويلات مع التحاكي لتعيين مجموعة نقط من المستوي تحقق خاصية معينة كما تستخدم في إنشاءات هندسية .

الأنـشـطـة

النشاط الأول :

الهدف : تعيين نسبة التحاكي بمعرفة المركز و صورة النقطة

* $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$

1) k = 1   2) $k = \frac{3}{2}$ 3) k غير موجود (عدم استقامية النقط)

* $\overrightarrow{GD} = k\overrightarrow{GB}$

1) $k = \frac{2}{3}$ 2) $k = -2$ 3) تصحيح في الشكل (B هي المسط العمودي للنقطة A على (GD)) ، $k = \sqrt{2}$

* في الشكل (5) : تصحيح : النقطة M هي تقاطع المستقيمين (ON) و (d_1) ، $k = -\frac{2}{3}$

النشاط الثاني :

الهدف : إثبات استقامية نقط باستخدام التحاكي

1) $\frac{IB}{IA} = \frac{IF+EF}{IB+BC} = \frac{EF}{BC} = \frac{IE}{IB} = \frac{IF}{IC}$ 2) $\frac{IB}{IA} = \frac{EF}{BC}$ 3) $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ID}$ لأن $\frac{IF}{IC} = \frac{FG}{CD} = \frac{2}{3}$

النشاط الثالث :

الهدف : التحاكي يكبر المساحات k^2 مرة (k نسبة التحاكي) إذا كان $|k| \succ 1$ و يصغرها k^2 مرة إذا كان $|k| \prec 1$

* $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CB} = \frac{1}{3}$ * $MM_1 = \frac{2}{3}AA_1$ و $PP_1 = \frac{1}{3}AA_1$ و $CN = \frac{1}{2}NB$

مع $A_1; M_1; P_1$ هي المساقط العمودية للنقط $A\ ; M\ ; P$ على الترتيب على المستقيم (BC)

النشاط الرابع :

الهدف : صورة دائرة بتحاكي هي دائرة مركزها صورة المركز و نصف قطرها $|k|R$

1) $AMBM'$ مستطيل   2) (AM) يوازي (BN)   3) $k = 3$ 4) $\overrightarrow{O'N} = \overrightarrow{O'I} + \overrightarrow{IN} = k\ \overrightarrow{OM}$

الأعـمـال الـمـوجـهـة

أعمال موجهة 1:

الهدف : تعيين محل هندسي باستعمال التحاكي

1) $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$ 2) $h(C) = (C')$ (C') دائرة عدا صورتي A و B بواسطة h

3) $h(O) = (O')$ حيث $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ (C') مركزها O' و تشمل G

أعمال موجهة 2 :

الهدف : استعمال التحاكي في إنشاء هندسي

(1) مرحلة التحليل :   * صورة K هي النقطة C

* صورة I هي E نقطة تقاطع (AI) مع الموازي لـ (LI) المرسوم من B
* صورة J هي D نقطة تقاطع (AJ) مع الموازي لـ (LJ) المرسوم من C
* صورة L , I , J و K هي صور B , E , D و C على الترتيب

(2) مرحلة التركيب : * IJKL حل للمسألة (صورة مربع بتحاك)

(BE) ، (LI) ، (LJ) و (DC) متوازية $\frac{AL}{AB}=\frac{AI}{AE}=\frac{AJ}{AD}=\frac{AK}{AC}=k$

$\overrightarrow{AL}=k\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{AJ}=k\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AK}=k\overrightarrow{AC}$

مع I , J , K و L هي صور E , D , C و B على الترتيب

* حل وحيد لأن BEDC وحيد

تمارين

أصحيح أم خاطئ : من 1 إلى 8

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8
الحكم	صحيح	صحيح	خاطئ	صحيح	خاطئ	خاطئ	صحيح	صحيح

أسئلة متعددة الاختيارات: من 9 إلى 14

رقم السؤال	9	10	11	12	13	14
الإجابة الصحيحة	1	3	1	2	2	1

15 1). $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$ ، 2). $\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OP}$ ، 3). $\overrightarrow{IJ}=-4\overrightarrow{AB}$ ، 4). $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

16 1). هي نظيرة A بالنسبة إلى B .
2). هي نظيرة C بالنسبة إلى D .

17 1). k = -3 ، 2). k = 5 ، 3). k = 2 ، 4). $k=-\frac{2}{3}$.

18 تصويب الخطأ (D' نظيرة D بالنسبة إلى C أثبت أن D' منتصف [AF]) يمكن استعمال نظرية طالس.

19 يمكن إثبات أن: AECF متوازي أضلاع.
تصويب الخطأ (Hنقطة تقاطع (AB) و (EI) أثبت أن H منتصف [EI]) نفس طريقة 18.

20

21 1). A'B'C'D'EFGH مكعب ، 2). صورة H هي O ، صورة F هي منتصف [FB].

22 1). صورة C هي A ، 2). $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ ، 3). علاقة شال ، 4). نعم.

23 تصويب (ABC مثلث متقايس الأضلاع) ،
1). $k_1=\frac{2}{3}$ ، 2). مركز h_2 هو نقطة تقاطع (CB) مع (NM) و نسبته $k_2=-\frac{2}{3}$

$k=-\frac{2}{3}$

24

25 1). $k=-\frac{1}{3}$ أو $k=-3$ ، 2). $k=\frac{2}{3}$ أو $k=\frac{3}{2}$ ، 3). $k=\frac{1}{2}$ أو $k=2$ ، 4). k =

26 نسبة التحاكي $k = \frac{1}{3}$

30 1). $\frac{11}{4}$ ، 2). -2 ، 3). $\frac{2}{3}$ ، 4). $-\frac{1}{3}$

29 k = -3

1). لا ، 2). نعم (تناظر مركزي)

31 $K = \frac{2}{3}$

32 1). مركز التحاكي هو تقاطع (AB) مع (CD).
2). مركز التحاكي هو تقاطع (AB) مع (EF).

33 1). نفس فكرة 32 ، 2). $\overrightarrow{OB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OA}$

35 1). 'A صورة A هي تقاطع (C) مع (AB) ، 'O صورة O هي مسقط 'A على (PQ) .
2). ('D) يشمل P و يوازي (D) ، ('C) مركزها 'O ويشمل P .
3). ('D) يمس('C) ، (C) و ('C) متماستان داخليا.

36 1). نفرض: $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ حيث $\alpha \in]0;1[$ و نجد: $\overrightarrow{A'M'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$
2). نستعمل التبادل الداخلي ، 3). يمكن استعمال نظرية طالس.

37 صورة B هي C .

38 المثلثان BDF و ACE متشابهان.

39 يمكن الاستعانة بالنظرية العكسية لطالس.

40 F،B،E صور C،O،'A بهذا الترتيب بتحاك و O منتصف [AC] .

42 1). لأن (DC) يشمل D صورة B و يوازي (AB).
2). و 3). استعمل طالس.

43 نعتبر E_1 ، E_2 ، E_3 منتصفات [AB]، [BC]، [CD] على الترتيب ، (E_1 ، E_2 ، E_3 في استقامية)
G_1 ، G_2 ، G_3 هي صور E_1 ، E_2 ، E_3 بتحاك مركزه O و نسبته $\frac{2}{3}$ فهي في استقامية .

44 1). ('C) دائرة مركزها $\omega\left(-1;-\frac{3}{2}\right)$ و نصف قطرها r = 1 (تمس محور التراتيب)
2). $(x+1)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = 1$

45 1). (C) دائرة مركزها $O(0;0)$ و نصف قطرها 2r = ، ('C) دائرة مركزها $A(3;0)$ و نصف قطرها r' = 1
2). بما أن: OA =2+1= 'r+ r فإن (C) و ('C) متماسان خارجيا.
3). $k= -\frac{1}{2}$

46 1). إذا كانت M نقطة من (C_1) فإن (IM) يقطع (C_2) في N حيث $\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IN}$.
2). استنتاج مما سبق أو مقارنة المثلثات.
3). القطران متناصفان.

47 1). $B\hat{A}C = 45°$ ، $E\hat{B}F = 45°$ (متبادلتان داخليا).

2). طالس ، $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$ ، 3). G هي صورة D بالتحاكي h ، $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$

48 1). مستقيم المنتصفين في المثلثين.
2). صورة [BE] هي [DG] ، $(PN)\perp(PQ)$

49 1). صورة A هي H ، 2). صورة (AI) هو (IH) و صورة (AJ) هو (JH)
3). خواص التناظر
B هي صورة C بالدوران r و منه C تقاطع (d_1) مع (d'_2) صورة (d_2) و نتمم بنفس الطريقة.

52 نستعمل خواص متوازي الأضلاع.

53 دائرة (c') صورة (c) بانسحاب شعاعه $\overrightarrow{BA}$.

54 المستقيم (Δ') صورة (Δ) بتناظر مركزي بالنسبة على النقطة I منتصف [AB] .

55 المستقيم (Δ') صورة (Δ) بتحاك مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$.

56 الدائرة (c') صورة (c) بتحاك مركزه O منتصف [AB] و نسبته $\frac{1}{3}$.

57 1). يمكن تطبيق نظرية طالس.
2). المحل الهندسي لـ M_1 و M_2 هو اتحاد الضلعين [CD] و [BE] من المعين BCDE الذي مركزه A

58 إذا كان $\beta\neq 0$ فإن $\overrightarrow{GB}=-\frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{GA}$

59 1). إذا كان $A\notin[BC]$ فإن $x=\frac{AC}{AB}$ ، و إذا كان $A\in]BC[$ فإن $x=-\frac{AC}{AB}$

2). $x = 2$ ، $x = -1$ ، $x = \frac{1}{2}$

3). لتكن D نظيرة B بالنسبة إلى A.
أ. C تنتمي إلى نصف المستقيم الذي حده D ولا يشمل B.
ب. C تنتمي إلى القطعة]DB[.
ج. C تنتمي إلى القطعة]DA[أو نصف المستقيم الذي حده B و لا يشمل D .

60 1). صورة M هي C ، 2). r دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$
3). (B'C') هو صورة (AM) بـ r ومنه $(B'C')\perp(AM)$.

61 1). $h_1(A)=J$ ، $h_2(A)=K$ ، 2). $\overrightarrow{BI}=k_1\overrightarrow{BO}$ ، $\overrightarrow{CI}=k_2\overrightarrow{CO}$
الاستنتاج: $k_1+k_2=\frac{BI}{BO}+\frac{CI}{CO}=\frac{BI+CI}{BO}=\frac{BC}{BO}=2$
3). $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OA}=(k_1+k_2)\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OA}$

62 1). (Δ) محور تناظر للمربع ABCD و نصف الدائرة (C) و بالتالي محور تناظر الشكل
$(\Delta)\perp(EF)$ و $(\Delta)\perp(DC)$ ومنه (EF)//(DC) .
3). $\frac{OE}{OD}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ و $\frac{OF}{OC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ومنه h(C)=F .
KF=HE و (KF)//(HF) و $(HK)\perp(HE)$.

63 <u>**الجزء الأول**</u> 1). $\overrightarrow{AM'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{BM''}=2\overrightarrow{BM'}$.
2). $\overrightarrow{BM''}=2\overrightarrow{BA}+2(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM})=-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BA}$

3). Ω تحقق العلاقة $\overrightarrow{A\Omega}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (*) و هي وحيدة .

(*) تؤدي إلى $3\overrightarrow{\Omega A}-\overrightarrow{\Omega B}=\vec{0}$ علاقة شال

لأن: $3\overrightarrow{\Omega A}-\overrightarrow{\Omega B}=3\overrightarrow{\Omega B}+3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Omega B}=2\overrightarrow{\Omega B}+3\overrightarrow{BA}=2(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB})+3\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

5). باستعمال السؤالين 2) و 4) نجد $\overrightarrow{\Omega M''}=-\overrightarrow{\Omega M}+3\overrightarrow{\Omega A}-\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega M}$.

أي: "M هي صورة M بتحاك مركزه Ω و نسبته1- (تناظر مركزي).

الجزء الثاني 1). h_1 تحاك مركزه G و نسبته $-\frac{1}{2}$ ، 2). h_2 تحاك مركزه M و نسبته 2 . 3) ، تناظر مركزي

4). نستنتج أن: [AP] ، [BQ] ، [CR] تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز التناظر.

64

1). $\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{AJ}$

5). المحل الهندسي للنقط K لما تتغير I على الدائرة التي مركزها C و نصف قطرها 1 هو دائرة مركزها C و نصف قطرها 6.

65

الجزء الأول: مستقيم أولير

1). صور C،B،A بالتحاكي h هي 'C'،B'،A .

2). صور أعمدة المثلث ABC بالتحاكي h هي محاوره.

3). صور H بالتحاكي h هي O.

4). O ، G ، H في استقامية.

الجزء الثاني: دائرة أولير

1). ('C) هي الدائرة المحيطة بالمثلث 'A'B'C مركزها (ω).

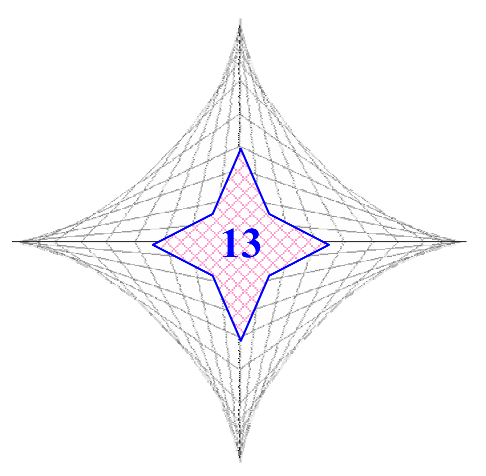
2). $\overrightarrow{G\omega}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ أي $\overrightarrow{O\omega}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ أي $\overrightarrow{O\omega}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$ أي ω منتصف [OH]

3). صور (C) بـ 'h هي دائرة مركزها ω ($\overrightarrow{H\omega}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$) و نصف قطرها هو $\frac{r}{2}$ وهي نفسها صورة (C) بـ h .

4). تطبيق طالس ، الاستنتاج: $\overrightarrow{\omega A'}=\overrightarrow{\omega H_A}$ ومنه $H_A\in$ ('C) بنفس الطريقة H_B ، H_C تنتميان إلى ('C).

5). صور رؤوس المثلث ABC بالتحاكي 'h هي: H_1 ، H_2 ، H_3 منتصفات [AH] ، [BH] ، [CH] .

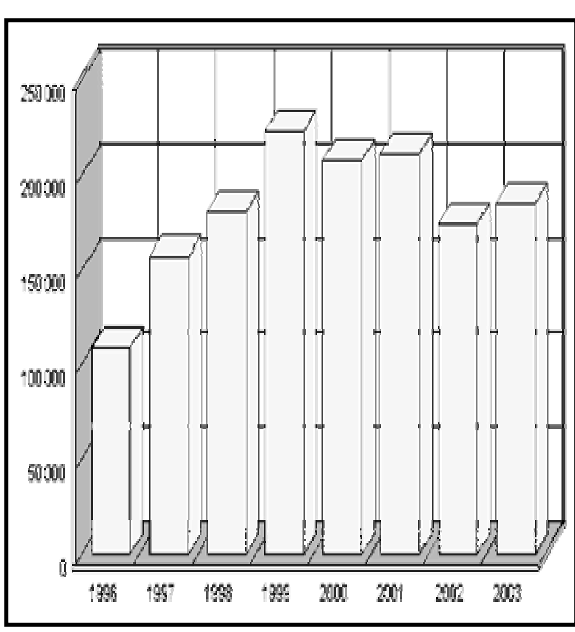
6). لأنها تشمل النقط التسع 'A'،B'،C ، H_A ،



الاحصاء

الكفاءات المستهدفة

- تلخيص سلسلة إحصائية بواسطة مخطط بالعلبة.
- تفسير مخطط بالعلبة.
- حساب الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة، الانحراف المعياري، الانحراف الربعي.
- تلخيص سلسلة إحصائية بواسطة الثنائية (الوسط الحسابي، الانحراف المعياري).
- تلخيص سلسلة إحصائية بواسطة الثنائية (الوسيط، الوسط الحسابي للانحرافات).
- توظيف خواص الانحراف المعياري و الانحراف الربعي في حل مسائل.



يهدف هذا الفصل إلى :

- **تكملة و تعميق المفاهيم التي سبقت دراستها في السنة الأولى .**
- **إدراج مفهومي الربعيين الأول و الثالث .**
- **تمثيل السلاسل بمخطط العلب .**
- **إدراج مقاييس التشتت (سبق التطرق إلى مفهوم المدى في السنة الأولى) .**
- **تلخيص و مقارنة السلاسل باستخدام الثنائية (وسط حسابي ، إنحراف معياري) . أو الثنائية (وسيط ، معدل الإنحرافات المطلقة) .**

استعمال المجدولات والآلة الحاسبة لمحاكاة التجارب ودراسة السالاسل الإحصائية وتلخيصها ومقارنتها ضروري من أجل السرعة والدقة في الحساب .

الأنـشـطـة

النشاط الأول :

الهدف : تقريب نفهومي الربعيين الأول و الثالث

1) $\overline{X} \simeq 8,57$ 2) $4,4,4,4,4,4,7,7,7,7,7,10,10,10,10,10,10,10,13,13,13,13,16$

3) $Med = 10$ 4) $Q_1 = 5,5$ (26 %) 5) $Q_3 = 10$ (78 %)

النشاط الثاني :

الهدف : إدراج مفهومي الربعيي في حالة متغير مستمر

1) $Q_1 = 3,8$ ، $Q_3 = 9$ ، $Med = 6,2$

3) معادلة (AB) : $0,15(2-x) = 2(0,12-y)$ بأخذ $y = 0,25$ نجد $x = 3,73$ ، x قيمة مقربة لـ Q_1

4) بنفس الطريقة $x \simeq 8,86$ مقربة لـ Q_3 ، $x \simeq 6,42$ مقربة لـ Med

النشاط الثالث :

الهدف : متوسط التشتت حول الوسط الحسابي أصغر منه حول الوسيط

1) $\overline{X} \simeq 10,07$ ، $Med = 10,1$ 2) $e'_m \simeq 0,2727$ ، $e_m \simeq 0,2711$

النشاط الرابع :

الهدف: الوسط الحسابي للتشتت حول قيم الطبع يكون أصغر ما يمكن حول الوسط الحسابي

1) $d'(x) = -2N(x'-x)$ (N التكرار الكلري) ، $d'(x)$ ينعدم عندما $x' = x$

($d'(x) \prec 0$ عندما $x \prec x'$) و ($d'(x) \succ 0$ عندما $x \succ x'$)

2) ننشر العبارة $d'(x) = \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{X})^2$ فنحصل على $d'(x) = nV$

النشاط الخامس :

الهدف : تأثير تغيير تآلفي على الإنحراف المعياري

1) $\overline{X} = 6,4$ 2) من النشاط الرابع و اعتبار تركيب الدوال : $x \mapsto \frac{1}{10}x$ ، $x \mapsto \sqrt{x}$ ، $x \mapsto d(x)$

3) $s(\overline{Y}) = 2s(\overline{X})$ 4) $s(\overline{Z}) = s(\overline{Y}) = 2s(\overline{X})$

الأعمال الموجهة

أعمال موجهة 1 :

الهدف : المقارنة بين سلسلتين إحصائيتين باستعمال الثنائية (وسط حسابي ، انحراف معياري)

I) 1) $m_1 = 6,83$, $s_1 = 9,58$ الشعار بالأحرى هو " الحلاقة في أقل من 38 دقيقة "

2) $m_2 = 10,58$, $s_2 = 10,74$ **3)** الحلاقة أقل من 41 دقيقة

II) 1) $m'_1 = 6,44$, $s'_1 = 9,22$, $m'_2 = 10,67$, $s'_2 = 10,98$

2) شعار B المقترح يصبح " في أقل من 42 دقيقة "

3) شعار Aأصدق منه قبل التعدل

الخلاصة : لا يمكن للقاعة B منافسة القاعة A في الحالتين لأن القاعة A أفضل من ناحية المعدل و الإنسيابية

أعمال موجهة 2 :

الهدف : مفهوم المعايرة

I) 1) $m_1 = 10,56$, $m_2 = 9,97$ 2) $s_1 = 2,76$, $s_2 = 2,21$

II) 1) 33 2) 56 % ، 47 % 3) $\overline{M}_1 = 9,98$, $\overline{M}_2 = 9,90$

4) - يتقدم - يتأخر 5) – فيزياء - رياضيات

التمـاريـن

أصحيح أم خاطئ : من 1 إلى 11

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
الحكم	خاطئ	صحيح	صحيح	صحيح	خاطئ	صحيح	صحيح	خاطئ	صحيح	خاطئ	خاطئ

أسئلة متعددة الإختيارات

12 3 **13** 3 **16** $\overline{X} =$ ، $\sigma(x) = 5.12$

17 (1. $\overline{X} = 4.6$ ، $\sigma(x) = 3.87$ ، (2. $\overline{X} = 734.6$ ، $\sigma(x) = 3.87$ ، (القيمة 7 مضافة تحذف).

19 (1. $\overline{Y} = 57.636$ ، (2. $\sigma(y) = 3.424$

20 عوض الأجهزة المتوسطة ، الأجور المتوسطة ، (1. $\overline{Y} = 16567.55$ ، $\sigma(y) = 6180$.

21 تصحيح: x عدد طبيعي ، (1. $m = x + \frac{38}{5}$ ، (2. $v = 5x^2 + 86$.

(3. $v = 1 \rightarrow x = \sqrt{17} \vee -\sqrt{17}$ قيم مرفوضة $v = 166 \rightarrow x = 4 \vee -4$ و منه (x=4).

(4. أصغر قيمة لـ V هي 86 ، (5. عوض ماهي قيمة الوسط الحسابي يكتب : ماهي قيمة الوسط الحسابي عند ئذ ، m=7.6

22 (1. $m = x + y + \frac{17}{6}$ ، (2. $v = 6(x^2 + y^2) + \frac{35}{2}$ ، **23** لا توجد

24 (1. $\overline{X_1} = 11.2759$ ، $\sigma(x_1) = 1.59518$ ، $\overline{X_2} = 12.03$ ، $\sigma(x_2) = 2.684$ ، $\overline{X_3} = 12.5$ ، $\sigma(x_3) = 4.88737$ ،

(2. تصحيح بدل علل إجابتك ، نكتب علق على الإجابة ، $\overline{X} = 11.8875$ ، $\sigma(x) = 3.21712$.

25

(1. n=133 ، رتبة Q_1 هي 34 ، رتبة Q_3 هي 100 رتبة الوسيط هي 67 .

(2. n=154 ، رتبة Q_1 هي 39 ، رتبة Q_3 هي 116 ، الوسيط يوجد حدان أوسطان رتبتاهما 77 ، 78 .

لا يمكن تحديد رتبة الوسيط و إنما الوسط هو الوسط الحسابي لقيميت الحدين الذين رتبتاهما 77 و 78 .

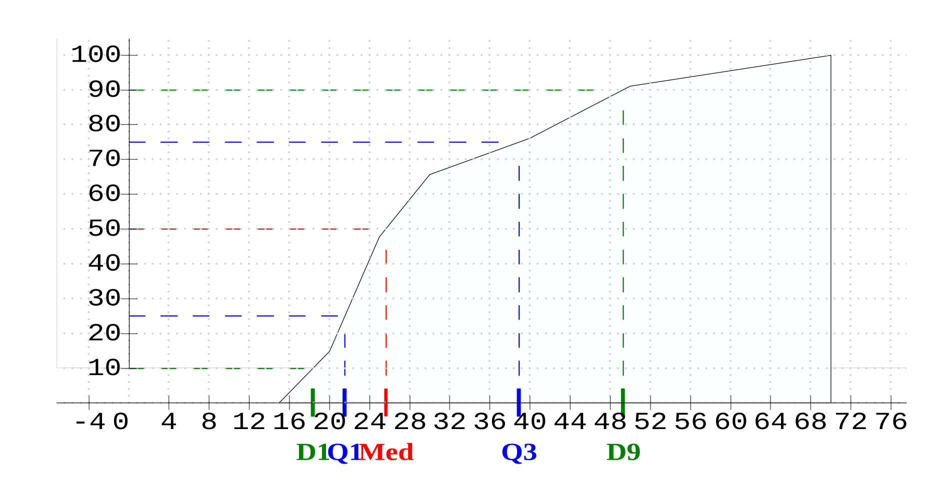
26 (1. $Me = 0.4$ ، $Q_1 = 0.2$ ، $Q_3 = 0.6$ ، $D_1 = 0.1$ ، $D_2 = 0.7$.

28 تصحيح: بدل المجتمع ، المجمع و Q_3 بدل Q_2

(3. $Me = 25.625$ ، $Q_1 = 21.5341$ ، $Q_3 = 38.9286$

(1.

	[15,20[	[20,25[	[25,30[	[30,40[	[40,50[	[50,70[
X_i	10	22	12	7	10	9
F_i	0.14	0.32	0.17	0.1	0.14	0.08



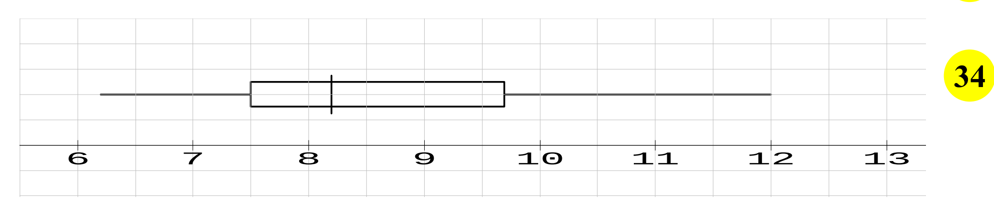
29 ملاحظة: توضيح التدريجة على المحورين و استعمال الورقة الميليمترية ، $Me = 25$ ، $Q_1 = 15$ ، $Q_3 = 40$

30 1). $Me = 5$ ، $Q_1 = 5$ ، $Q_3 = 5$.
2). $Me = 3$ ، $Q_1 = 3$ ، $Q_3 = 4$.
3). $Me = 5.5$ ، $Q_1 = 3$ ، $Q_3 = 8$.
4). $Me = 5.5$ ، $Q_1 = 3$ ، $Q_3 = 8$.
5). $Me = 3$ ، $Q_1 = 2$ ، $Q_3 = 4$.

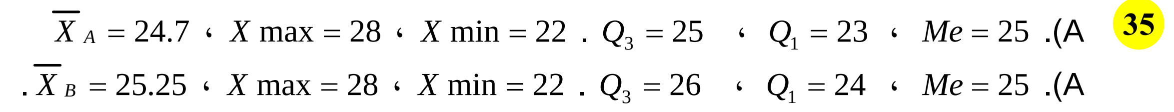
32 $Me = 25$ ، $Q_1 = 10$ ، $Q_3 = 32.5$. $X\min = 50$ ، $X\max = 0$

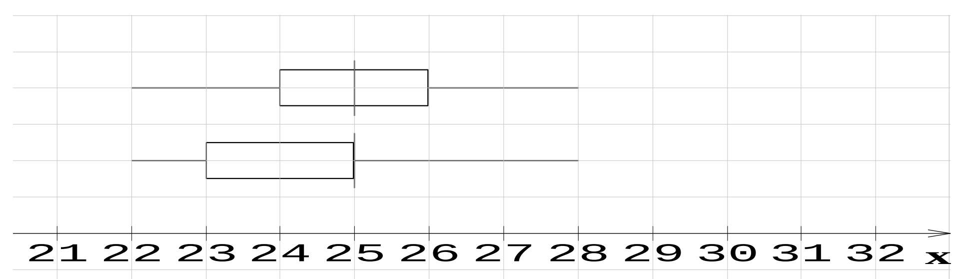
33 $Me = 190$ ، $Q_1 = 180$ ، $Q_3 = 250$. $X\min = 150$ ، $X\max = 270$

34



35 A). $Me = 25$ ، $Q_1 = 23$ ، $Q_3 = 25$. $X\min = 22$ ، $X\max = 28$ ، $\overline{X}_A = 24.7$
A). $Me = 25$ ، $Q_1 = 24$ ، $Q_3 = 26$. $X\min = 22$ ، $X\max = 28$ ، $\overline{X}_B = 25.25$.





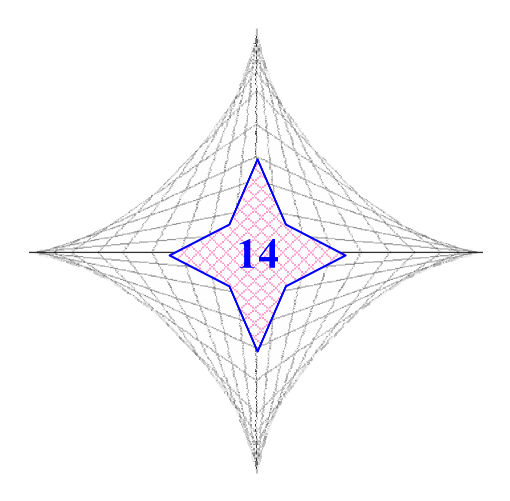
37 $\sigma(x) = 9.74$ ، **38** $\overline{X} = 4$ **39** نضع: $n_1 = n_2 = n_3 = ... = 1$

41 1). متوسط العمر 42 سنة و213 يوم ، 2). $Me = 43$ ، $Q_1 = 28$ ، $Q_3 = 64$.

43 2). السلسلة (2) $\overline{X}_2 = 156.087$ ، $Q_1 = 152$ ، $Q_3 = 160$ ، الانحراف الربعي:8 .
السلسلة (1) $Me = 170$ ، $Q_1 = 168$ ، $Q_3 = 176$ ، الانحراف الربعي: 8 .

44 1). نفرض n كرة بيضاء $S_1 = \frac{50-n}{50}$ ، $m_1 = \frac{n}{50}$
3). باستعمال العلاقتين السابقتين. ، 4). m=0.374 وبنفس الطريقة نجد S .
5). تصحيح عدد الكرات المسحوبة هو 281 ، m'=0.74 ، 6). m'=m .

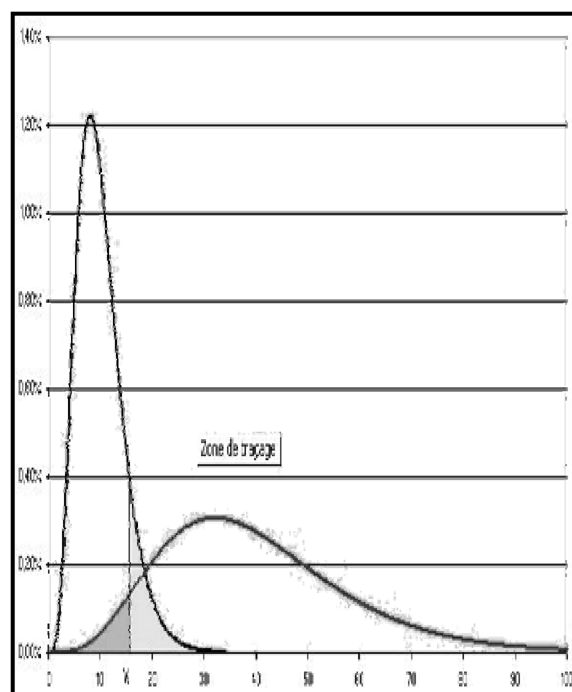
47 5). معدل آخر مترشح ناجح أو العشري السابع.



الاحتمالات

الكفاءات المستهدفة

- وصف تجربة عشوائية بسيطة عدد النتائج الممكنة فيها منته.
- نمذجة بعض الوضعيات البسيطة.
- حساب الأمل الرياضياتي، الانحراف المعياري و التباين لقانون احتمال.
- محاكاة تجارب عشوائية بسيطة.
- حساب احتمال حادثة بسيطة و حادثة مركبة.
- استعمال خواص الاحتمال في حساب احتمالات بعض الحوادث المركبة.
- تعيين قانون الاحتمال لمتغير عشوائي.
- حساب الأمل الرياضياتي، الانحراف المعياري و التباين لمتغير عشوائي.



- **يطلع المتعلم لأول مرة على نظرية الإحتمالات .**
- **يتم التطرق لها من خلال الإحصاء باستعمال التواترات للانتقال من التجربة الى النظرية**
- **يعرف الإحتمال انطلاقا من قانون الاحتمال**
- **يدرج مفهوم المتغير العشوائي و يلاحظ المتعلم العلاقة بين المتوسط في الإحصاء و الأمل الرياضياتي في الإحتمالات و كذلك الإنحراف المعياري**
- **يلجأ الى المحاكاة للمصادقة على النموذج المقترح و المقارنة بين التجربة و النظرية**

الأنشطة

النشاط الأول :

الهدف : مدخل الى الإحتمالات باستعمال التواترات النظرية و في المرحلة الثانية استعمال مجدول إكسال

4) (f_n) تؤول الى 0,16   6) (m_n) تؤول الى 3,5

7) منحى التباينات يقترب من المستقيم الذي معادلته y = 2,81 عندما يكبر n بالقدر الكافي

النشاط الثاني :

الهدف : تعريف قانون إحتمال تجربة عشوائية

1) $P(A)=P(\overline{A})=P(B)=P(\overline{B})=\frac{1}{2}$ و $P(C)=\frac{5}{6}$

2)

	باعتبار الرقم				باعتبار اللون R: أحمر ، V: أخضر	
X_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**V**	**R**
$P(X_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

3) $P(A)=\frac{3}{7}$ ، $P(B)=\frac{2}{7}$

النشاط الثالث :

الهدف : إدراج مفهومي المتغير العشوائي و الأمل الرياضياتي

1)

X_i	**1**	**2**	**........**	**15**
$P(X_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{15}$

2) G = - 20 ، G = 30 – 20 ، G = 200 – 20

3) $P(G = -20)=\frac{12}{15}$

4)

G	**-20**	**10**	**180**
الإحتمال	$P_1=\frac{12}{15}$	$P_2=\frac{2}{15}$	$P_3=\frac{1}{15}$

* $P(G\geq 0)=P_2+P_3=\frac{1}{5}$ * $E=\frac{-40}{15}$ (E متوسط الربح)

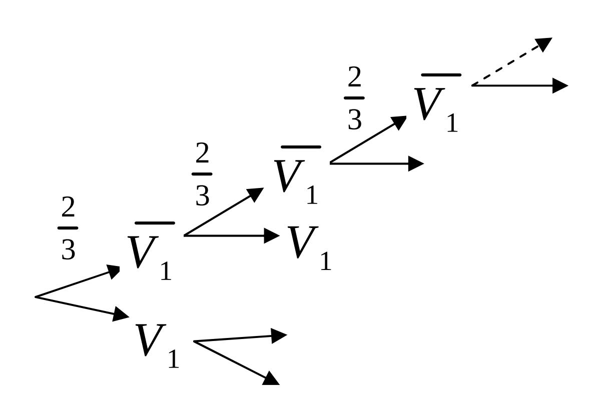
الأعمال الموجهة

أعمال موجهة 1 :

الهدف : استعمال الشجرة (العنكبوتية) لحساب إحتمال

تصحيح : تحذف الفرضية : نقبل في هذا التمرين $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

1) لحساب $P(V_1)$ مثلا



بقاء C_1 فارغة بعد n مرة يعني عدم استقرار السهم على الرفم 1 بعد n مرة أي إستقراره في كل مرة على الرقمين 2 أو 3

$$P(V_1) = \underbrace{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times.....\times\frac{2}{3}}_{n\text{مرة}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

2) $V_1 \cap V_2$ هي الحادثة :" في نهاية توزيع البيض تبقى السلتان C_1 و C_2 فارغتين " أي أن كل البيض موجود في السلة C_3 $P(V_1 \cap V_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3) $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ هي الحادثة المستحيلة أي $P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = 0$

4) $P(V_1 \cup V_2 \cup V_3) = 3\frac{2^n - 1}{3^n}$

5) * $\overline{M}$ هي الحادثة :" توجد سلة واحدة على الأقل لا تحوي أي بيضة "

* $P(M) = 1 - P(\overline{M}) = 1 - P(V_1 \cup V_2 \cup V_3)$

* يستعمل مجدولا لتعيين n أو بالآلة الحاسبة Ti83+

أعمال موجهة 2 :

الهدف : النمذجة

1) تحقق F يعني $|a-b| \le n-1$ و بالتالي $|a-b| \le n$ و هذا يعني أن الشخصين يلتقيان لأن الفرق بين وقتي مجيئيهما أقل من ربع ساعة

2) إذا التقى الشخصان فهذا يعني أن $|a-b| \le n$ أي أن G محققة

3) تصحيح : $x_n = \frac{15n-7}{32n}$ عوض $x_n = \frac{15n-7}{16n}$

$1-n \le a-b \le n-1$ أي أن $a-n+1 \le b \le a+n-1$

4) بتعداد الحالات الملائمة و الحالات الممكنة نجد $x_n = \frac{15n-7}{32n}$

5) بنفس الطريقة $y_n = \frac{15n+7}{32n}$

6) باستعمال النهايات و الحصر نجد $p = \frac{15}{32}$

تمارين

أصحيح أم خاطئ : من 1 إلى 6

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6
الحكم	صحيح	خاطئ	خاطئ	صحيح	خاطئ	خاطئ

7 .(1 $p(B \cap C) = 0.4$ ، .(2 $p(A \cup C) = 0.8$ ، .(3 $p(\overline{A} \cap C) = 0.5$

8 $E(x) = 6$ ، **9** $a = \frac{5}{12}$

10 عدد الحالات الممكنة: $6^2 = 36$ ، عدد الحالات الممكنة: $6 \times 5 = 30$

11 $p(B) = 0.6$

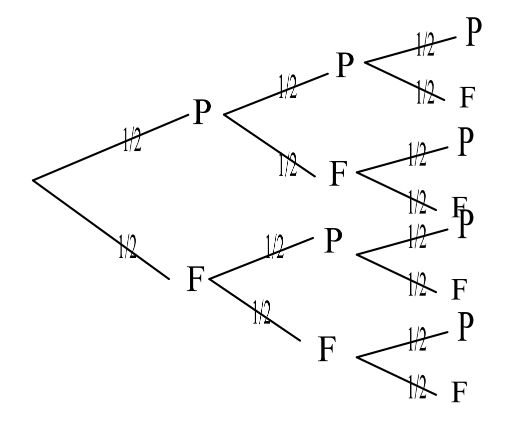
12 $p(A \cup B) = 0.82 = 0.45 + 0.37 = p(A) + p(B)$

13 $p(1)=p(2)=p(5)=p(6)=\frac{6}{29}$ ، $p(3)=\frac{3}{29}$ ، $p(4)=\frac{2}{29}$

14 1). $p(D)=p(E)=\frac{1}{11}$ ، $p(A)=p(B)=p(C)=\frac{3}{11}$

2). $p(D\cup E)=\frac{2}{11}$ ، 3). $p(A\cup B\cup C)=\frac{9}{11}$ ، 4). $p(\overline{A})=\frac{8}{11}$

15 $\frac{1}{24}$



17 1). مخطط الشجرة 2). عدد كل الإمكانيات 8

3). لأن $p(ب)=p(ح)=\frac{1}{2}$

احتمال كل إمكانية هو $\frac{1}{8}$

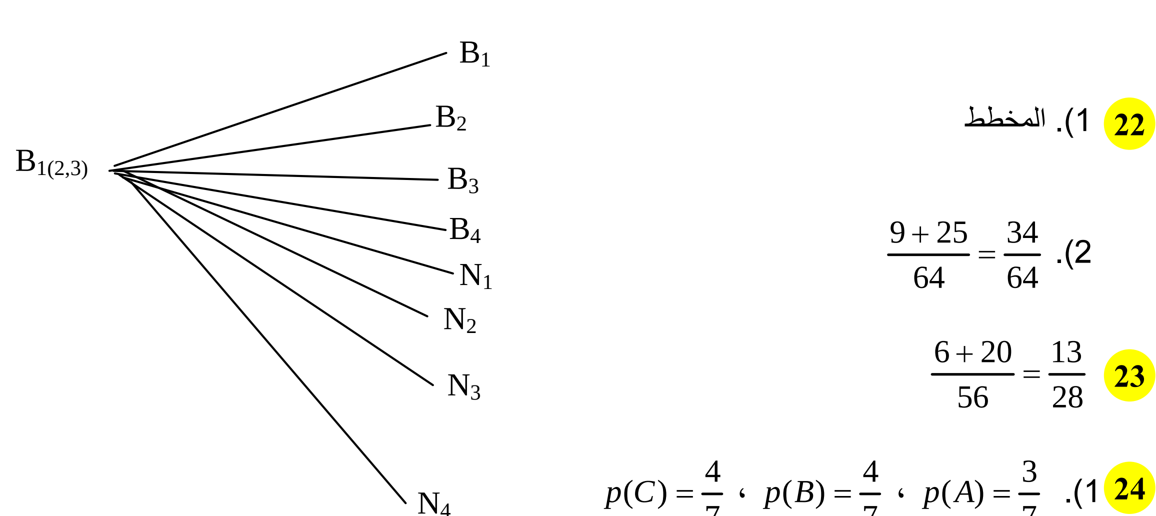
18 1). لا يوجد تساوي احتمال ، 2). نعم يوجد تساوي احتمال .

19 1). لأن: $p(1)=\frac{1}{6}$ ، $p(2)=\frac{2}{6}$ ، $p(3)=\frac{3}{6}$. 2). $\Omega=\{1,2,3\}$

20 $p(A)=\frac{1}{2}$ ، $p(B)=\frac{1}{2}$ ، $p(C)=\frac{1}{12}+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$

21 1). (أ) $\frac{212}{531}$ ، (ب) $\frac{238}{531}$ ، (ج) $\frac{124}{531}$ ، 2). $\frac{212}{293}$ ، 3). $\frac{43}{124}$

22 1). المخطط



2). $\frac{9+25}{64}=\frac{34}{64}$

23 $\frac{6+20}{56}=\frac{13}{28}$

24 1). $p(A)=\frac{3}{7}$ ، $p(B)=\frac{4}{7}$ ، $p(C)=\frac{4}{7}$

2). $p(A\cap B)=0$ ، $p(A\cap C)=\frac{2}{7}$ ، $p(C\cap B)=\frac{2}{7}$ ، $p(A\cup B)=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=1$ ،

$p(A\cup C)=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ ، $p(B\cup C)=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$.

25

$$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=1-p(\overline{A})+1-p(\overline{B})-(1-P(\overline{A\cup B}))$$

$$=1-\left[p(\overline{A})+p(\overline{B})-p(\overline{A\cup B})\right]=1-\left[0.44+0.63-0.52\right]=0.45$$

26 1). عدد الإمكانيات 8

2). $\frac{3}{8}$

G G G
G G F
G F G
G F F
F G G
F G F
F F G
F F F

27 1). $(1,1)$، $(1,2)$، $(1,5)$، $(1,7)$، $(2,1)$، $(2,2)$، $(2,5)$، $(2,7)$، $(5,1)$، $(5,2)$، $(5,5)$، $(5,7)$، $(7,1)$، $(7,2)$، $(7,5)$، $(7,7)$.

2). $p(A)=\frac{4}{16}$ ، $p(B)=0$ ، $p(C)=\frac{1}{16}$ ، $p(D)=\frac{6}{16}$

28 1). $\frac{20}{156}$ ، 2). $\frac{79}{156}$ ، 3). $\frac{52}{156}$ ، 4). $\frac{20}{77}$

29 1). $\frac{14}{45}$ ، 2). $\frac{5}{45}$ ، 3). $\frac{1}{2}$

30 استعمال المخطط بالشجرة 1). $p(F)=\frac{2}{3}$

2). احتمال ظور وجه : $\frac{26}{27}$ ، احتمال ظهور الوجه مرتين: $\frac{4}{9}=\frac{12}{27}$

31 1). $P(O^{+})=0.83$ ، 2). $P(B)=0.25$ ، 3).
$P(Rh^{-})=0.2\times0.2+0.25\times0.15+0.45\times0.17+0.1\times0.1$
4). $P(O\cap Rh^{+})=0.45\times0.83$

نضع: V معطف ، P سروال ، C قميص ، B أبيض ، N أسود

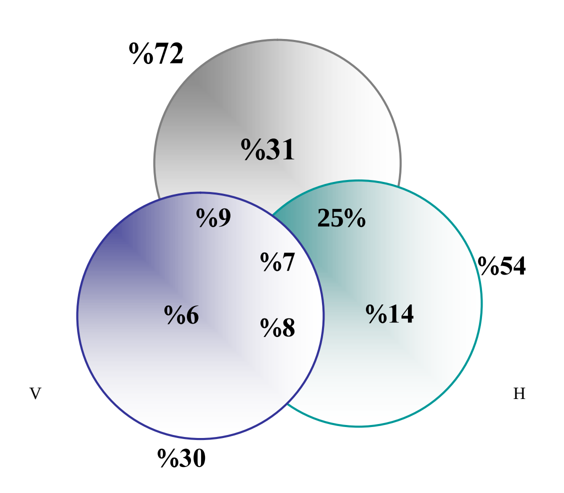
32 1).

Pn Vn CB_1
Pn Vn CB_2
Pn Vn Cn
Pn Vb CB_1
Pn Vb CB_2
Pn Vb Cn
Pb Vn
Pb Vb

3). $\frac{1}{2}$ ، 4). $\frac{1}{2}$







(2. $P(A\cap V)=0.16$ ، $P(A\cup H)=0.94$ ، $P(A\cap V\cap H)=0.70$ ، $P(\overline{A\cup H})=0.06$ ، $P(\overline{A\cup V})=0.14$

(3. $E=A\cup H\cup \overline{V}$ ، $F=A\cap(\overline{H\cup V})$ ، $G=A\cap H\cap \overline{V}$

34 $P(F)=0.68$ ، $P(G\min)=0.76$ ، $P(F\cup Gmaj)=\frac{49}{72}+\frac{49}{230}$

ملاحظة: عوض 650 قاصرا 65 قاصرة.

35 1). 50 حبة

	دائرية الشكل	مربعة الشكل	المجموع
بالشكولاطة	5	10	15
بالمربى	25	10	35
المجموع	30	20	50

(2. $P(A)=0.4=\frac{2}{5}$ ، $P(B)=0.7$ ، $P(C)=0.2$ ، $P(D)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(C)=0.9$

(3. $\frac{1}{2}$

36 $\frac{1}{24}$

37 1). عدد الإمكانيات 15 ، 2). $\frac{2}{5}$

38 عدد الحالات 28 ، 1). $\frac{2}{7}$ ، 2). $\frac{9}{14}$

39 0.3-   30 %

40 (1. $P(l \cup c) = \frac{3}{4}$ ، (2. 0.15 .

41 (1. $P(A \cup B) = 1$ و الحادثة $(A \cup B)$ حادثة أكيدة
(2. $P(A \cap B) = 0.2$ ، n=30

42 (1. E(x) = 0.6 ، (2. $\sigma(x) = 0.6$

43 ملاحظة عوض : أحسب $v(x)$ انحراف لـ x و $\sigma(x)$ تباين لـ x .
نكتب أحسب $v(x)$ تباين x و $\sigma(x)$ انحراف x .
$\alpha = \frac{11}{80}$ ، $E(x) = \frac{479}{240}$ ، $v(x) = 3.36$ ، $\sigma(x) = 1.83$

44

X	8	3	4	7	9
P(X=x)	$\frac{16}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{31}$

$E(x) = -2.06$ ، $v(x) = 98.94$

45 نميز حالتين:
بإعادة الكرة

X	0	1	2
P(X=x)	$\frac{16}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{4}{36}$

بدون إعادة الكرة

X	0	1	2
P(X=x)	$\frac{12}{31}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{2}{30}$

$E(x) = \frac{2}{3}$ ، $v(x) = \frac{16}{45}$

46

ق1 \ ق2	2	3	6	9
2	4	6	12	18
3	6	9	18	27
6	12	48	36	54
9	18	27	54	81

$P(x = 12) = \frac{1}{8}$ ، $P(x = 36) = \frac{1}{16}$ ، $P(x < 9) = \frac{3}{16}$ ، $P(x \geq 27) = \frac{3}{8}$

قانون الاحتمال:

X	4	6	9	12	18	27	36	54	81
P(X=x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

47 (1. $X(\Omega) = \{0,1,2\}$
(2.

X	0	1	2
P(X=x)	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{6}{42}$

3). $E(x)=\frac{6}{7}$ ، $v(x)=\frac{20}{49}$ ، 4). نفس الطريقة ، 5). Z = 2-N

X	0	1	2
P(X=x)	$\frac{2}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{20}{42}$

مسائل

48 **الجزء الأول**

1). عدد الحالات الممكنة 30 ، 2). $X(\Omega)=\{2,3,4,5,6\}$ ، 3).

X	2	3	4	5	6
P(X=x)	$\frac{6}{30}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{1}{30}$

الجزء الثاني

1). عدد الحالات الممكنة 36 ، 2). $X(\Omega)=\{2,3,4,5,6\}$

3).

X	2	3	4	5	6
P(Y=y)	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

5). $P(y\leq 1)=0$

الجزء الثالث

1). عدد الحالات الممكنة 15 ، 2). $X(\Omega)=\{2,3,4,5\}$ ، 3).

X	2	3	4	5
P(Y=y)	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

5). $P(Z\geq\frac{7}{2})=\frac{2}{5}$

49 1).

الآحاد / العشرات	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

2).

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(X=x)	$\frac{2}{99}$	$\frac{3}{99}$	$\frac{4}{99}$	$\frac{5}{99}$	$\frac{6}{99}$	$\frac{7}{99}$	$\frac{8}{99}$	$\frac{9}{99}$	$\frac{10}{99}$

X	10	11	12	13	14	15	16	17	18
P(X=x)	$\frac{9}{99}$	$\frac{8}{99}$	$\frac{7}{99}$	$\frac{6}{99}$	$\frac{5}{99}$	$\frac{4}{99}$	$\frac{3}{99}$	$\frac{2}{99}$	$\frac{1}{99}$

3). $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - \frac{14}{99} = \frac{85}{99}$.

X	+1	-4
P(Y=y)	$\frac{85}{99}$	$\frac{14}{99}$

$E(y) = \frac{29}{99}$ ، $\sigma(y) = 0.0175$ ، اللعبة ليست عادلة.

50 1).

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(X=x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Y	0	1'	2	3'	4	5'	6
P(Y=x)	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

2). $P(X = Y) = \frac{6}{61}$ ، 3). $P(X.Y > 17) = 1 - P(XY \leq 17) = 1 - \frac{45}{61} = \frac{16}{61}$ ،

4). $P(2X + Y = 13) = \frac{3}{61}$

51

X	1	2	3	4	5
P(Y=x)	$\frac{2}{56}$	$\frac{10}{56}$	$\frac{18}{56}$	$\frac{12}{56}$	$\frac{14}{56}$

52 1). $\beta + \delta \neq -1$ ، $G\left(\frac{\beta - \delta}{\beta + \delta + 1}; \frac{1}{\beta + \delta + 1}\right)$

2). ملاحظة: عوض نرمي زهرة نكتب نرمي زهرة نرد مرتين متتاليتين.

$\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{9}$

53

X	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

54 باستعمال المخطط بالشجرة نجد: 2). $X(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$ ، 3). $E(x) = \frac{13}{18}$

55 1). , M(0,0),M(0,1),M(0,2),M(1,0),M(1,1),M(1,2),M(2,0),M(2,1),M(2,2)

2). $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(A) = \frac{2}{9}$ ، $E(x) = \frac{10}{3}$

X	0	1	2	4	5	8

P(X=x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

56 1). $P(A)=\frac{7}{30}$ ، $P(B)=\frac{7}{15}$ ، $P(C)=\frac{7}{15}$ ، $P(D)=\frac{8}{15}$

2). تصويب عين قيم العدد الطبيعي n ، n =14 أو n =13 ، $P_n=\frac{7}{13}$

57 1). $P_1=0.1$ ، استنتاج $P_3=0.2$ ، $P_4=0.4$ ، $P_5=0.1$ ، $P_6=0.05$

2). $P(A)=0.4$ ، $P(B)=0.45$ ، $P(C)=0.25$ ، $P(D)=0.1$ ، $P(E)=0.55$ ، $P(F)=0.6$

3). $X(\Omega)=\{40,-10,-100\}$

X	40	-10	-100
P(X=x)	0.4	0.4	0.2

ج). $E(x)=-8$ ، د). 60

58 $P(A)=\frac{1}{108}$ ، $P(B)=\frac{17}{108}$ ، $P(C)=\frac{5}{6}$ ، $P(D)=\frac{5}{108}$